UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SUELLEN RODRIGUES

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS PARABÓLICAS USANDO O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

CURITIBA
2010

SUELLEN RODRIGUES

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS PARABÓLICAS USANDO O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração: Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Luís da Costa Dias

CURITIBA
2010

TERMO DE APROVAÇÃO

SUELLEN RODRIGUES

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS PARABÓLICAS USANDO O MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção de grau de Mestre em Ciências no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - Área de Concentração: Mecânica Computacional - Setores de Tecnologia e Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Nelson Luís da Costa Dias, Ph.D.(Orientador)

Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE - UFPR

Prof. Ademir Alves Ribeiro, D.Sc.

Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE - UFPR

Prof^{a}. Tamia Marta Yamamoto, D.Sc.

Universidade Tuiuti do Paraná - UTP

Curitiba, 14 de julho de 2010.

DEDICATÓRIA

A minha família, meu esposo Cleverson e meu filho Davi, por esperar a hora certa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela vida, pela saúde e pela sabedoria, depois ao professor Nelson Dias, pela compreensão e dedicação com que orientou este trabalho, tornando possível a realização do mesmo.

Ao meu esposo Cleverson pelo incentivo, pela companhia em todas as horas, por compreender a minha ausência e por muitas vezes até me auxiliar em dificuldades acadêmicas. Aos demais membros da minha família: meu pai, meu irmão, meus sogros e todos os outros que contribuíram de alguma forma para realização deste trabalho.

A Maria minha amada mãezinha por todo amor que dispensou a mim e pelo auxilio emocional e espiritual durante toda minha jornada até chegar aqui.

A minha cunhada Daniele por tudo que fez pelo sucesso da minha dissertação, por todos os bons conselhos e pelo companheirismo diário no CESEC.

Aos queridos amigos do CESEC: Bruno Solheid, Lucas Máximo, Fabio Balbo, Raphael Scuciato, Luciana Alexandre, Iara Zadonai, Marcelo Franco, Marina Vargas, Rodrigo Dias, Vanessa Ales, a querida Maristela Bandi e todos os demais que talvez não foram citados aqui, mas que sempre me apoiaram seja em dificuldades acadêmicas e/ou emocionais.

Aos amigos Marco Aurélio Hadad, Vanessa Cavali, seja pelos bons bons conselhos ou por todas as longas horas de estudo.

Aos professores do CESEC, que contribuíram com seus conhecimentos, os quais foram essenciais para consolidação deste trabalho.

Ao meu querido e amado filho Davi, que esperou a mamãe terminar trabalho para depois vir ao mundo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

E por fim a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho e dessa grande vitória pessoal o meu mais profundo

agradecimento.

EPÍGRAFE

. . . Haja luz
Deus

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar as soluções de equações diferenciais parabólicas usando o método das características. Este método consiste em transformar uma equação diferencial parcial de segunda ordem, em um sistema de equações de primeira ordem. Estas equações são resolvidas através de integração ao longo das linhas características de cada equação. Porém na Difusão, não se pode obter duas equações. Desta forma o método não se aplicaria a esse tipo de equação, por essa razão, foi necessária uma adaptação no método das características tradicional para que pudesse ser usado em equações parabólicas. Esta adaptação teve um preço alto, pois através dela foram gerados sistemas que para serem resolvidos, exigem o conhecimento a priori da solução da equação. A adaptação também gerou integrais que exigem um considerável esforço analítico para sua resolução. Após aplicação do método verificou-se que a solução obtida através deste "pseudo" método das característica era idêntica aquela obtida analiticamente, ou seja, o método possui consistência suficiente para recuperar a solução.

Palavras-chave: Método das Características. Equação Parabólica. Adaptação.

ABSTRACT

In this work we study the behavior of solutions of second-order parabolic partial differential equations by means of the method of characteristics. The equation is first converted to a system of first-order equations which can then, in principle, be solved by simple quadrature along the characteristic lines. It is well known, however, that this is not immediately possible for parabolic equations: the resulting system in this case possesses only one eigenvector, and therefore only one characteristic direction. In order to circumvent this difficulty, it was necessary to adapt the method of characteristics as follows. We assume that the solution is known, and change the first-order system of equations to recover two eigenvectors. This comes at a high price, as the solution has to be known in advance. Then, with derivatives of the solution incoporated to the first-order system of equations, the method of characteristics can be applied, and the analytic solution is recovered. The procedure can therefore be applied in a consistent way. We conjecture that our analytical treatment can be adapted to generate iterative solutions by simple numerical methods.

Key-words: Characteristics method. Parabolic equation. Adaptation.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

São muitas as aplicações existentes para as Equações Diferenciais Parciais. Sabe-se que grande parte dos fenômenos físicos e de engenharia, podem ser descritos através de uma Equação Diferencial Parcial. Tais equações são classificadas em três tipos: Elípticas, Parabólicas ou Hiperbólicas. Esta classificação não é simplesmente acadêmica, pois cada classe de Equação diferencial Parcial está associada a uma categoria diferente de fenômenos. Além disso, alguns métodos de solução que se aplicam a uma classe de equações podem não se aplicar a outra.

Pode-se distinguir na natureza dois tipos de fenômenos físicos: transientes e estacionários. Transientes são aqueles que evoluem com o tempo. Estacionários são os que estão em equilíbrio Fortuna (2000). Há métodos específicos de simulação para os dois tipos de fenômenos.

Problemas estacionários são em geral representados por equações do tipo elípticas, cujo protótipo é a equação de Laplace. Problemas transientes são aqueles que envolvem a variação temporal de grandezas físicas, por isso, podem ser modelados por equações do tipo hiperbólico tal como a equação da onda ou parabólicos assim como a equação da difusão. Esta última é o foco principal deste trabalho.

Problemas de difusão, podem ser resolvidos por diversos métodos, tanto numéricos quanto analíticos. Neste trabalho, utiliza-se dois métodos: Primeiramente obtém-se a solução analítica dos problemas de difusão, utilizando transformada de Laplace. Esta solução é obtida para que se possa avaliar, posteriormente o comportamento da mesma utilizando o método das características.

O método das características é um método tanto numérico (Romão et al., 2008) quanto analítico (Sarra, 2003) de solução de equações diferenciais parciais. Porém, classicamente, o método das características é utilizado para resolução de problemas hiperbólicos, tal como se pode verificar em Iório (2005). Neste trabalho procura-se explorar as informações que o método das características pode trazer na análise de equações diferenciais parabólicas. Embora o método em sua forma original seja incapaz de proporcionar soluções para este tipo de equação diferencial parcial, ele pode, como veremos, ser modificado para explicar o papel das linhas características na solução analítica. Isto tem um preço alto e , à primeira vista, inconsistente: é preciso conhecer a própria solução do problema para poder reescrevê-la na "forma"do método das características . Assim sendo, este trabalho deve ser visto como uma primeira exploração do tipo de informação qualitativa que se pode obter ao se ”aplicar” o método das características a problemas parabólicos.

Deve-se notar, entretanto, que numerosos métodos na literatura são construídos de forma não muito diferente daquela que será exposta aqui; por exemplo, o método de Gauss-Seidel para resolver iterativamente sistemas de equações lineares explicita cada incógnita em função de todas as outras, parte de uma solução arbitrária, e geralmente converge ao fim de algumas iterações, sendo inclusive muito mais eficiente, para sistemas lineares grandes, do que o método de eliminação de Gauss. Desta forma, embora neste trabalho, nós dependamos do conhecimento a priori da solução da equação diferencial parcial parabólica, nós antevemos que a técnica de re-formatação do problema nos moldes do método das características poderá dar lugar a métodos iterativos em que se parta de uma estimativa inicial da solução.

Nos próximos capítulos é feita uma explanação do método das características tradicional, com suas aplicações típicas e também algumas aplicações em equações diferenciais parciais do tipo parabólicas.

Iniciamos esta explanação no capítulo 2, onde são relembrados alguns conceitos fundamentais para o conhecimento das equações diferenciais parciais. Também abordamos as formas de obtenção das soluções de equações diferenciais parciais usando o método das características. Primeiramente exploramos a classificação das equações diferenciais parciais. Em seguida temos dois exemplos de utilização tradicional do método das características, primeiro em um problema de primeira ordem linear em seguida em um problema de primeira ordem não linear.

No capítulo 3 é abordada a equação da onda, da mesma maneira tradicional que foi resolvida por d'Alambert. Este problema é típico para utilização do método das características, é considerado um bom exemplo para ilustrar o método aplicado em problemas de segunda ordem.

No capítulo 4 vamos tratar de um primeiro caso de equação diferencial parcial do tipo parabólica. Para solução desta equação, inicialmente vamos usar transformada de Laplace para encontrar a solução analítica, em seguida vamos analisar a solução obtida analiticamente sob a ótica do método das características. A conclusão obtida com este estudo é a de que a solução obtida através de transformada de transformada de Laplace é a mesma solução obtida através do método das características.

No capítulo 5 vamos abordar um segundo caso de equação diferencial parcial do tipo parabólica em um problema de difusão. Neste caso também faremos o mesmo procedimento do capítulo anterior. A diferença é que neste capítulo, a obtenção da solução através do método das características é muito mais complicada do que no capítulo anterior.

No capítulo 6 temos as conclusões e as orientações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

A Forma Clássica de Utilização do Método das Características

No capítulo 2 será abordado o Método das Características na sua forma clássica. Para isso, vamos mostrar algumas soluções de equações diferenciais parciais que foram obtidas usando o método. O objetivo desta seção é a familiarização com a versão analítica do método das caracterísiticias, que é o cerne deste trabalho.

Na seção 2.1, é abordada a classificação das equações diferenciais parciais. O objetivo desta seção é familiarizar o leitor com os tipos de equações abordadas neste trabalho.

Nas seções 2.2 e 2.3, são resolvidos dois exemplos de problemas envolvendo equações diferencias parciais lineares e não lineares. O método das características é utilizado para obtenção das soluções destas equações.

2.1 Classificação das Equações Diferenciais Parciais

Uma Equação Diferencial Parcial pode ter vários tipos de classificação, de acordo com a ordem das derivadas, com os coeficientes das derivadas e com o termo independente na equação.

Vamos começar pela classificação de acordo com a ordem da derivada:

- Uma equação diferencial parcial pode ser classificada de acordo com a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação:

  – se $u(x, y)$, é uma função de duas variáveis, a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, pois a derivada de maior ordem é dois. Generalizando temos o seguinte:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{n-1}} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

é uma equação diferencial parcial de ordem n, pois a ordem de sua maior derivada é n.

- De acordo com os coeficientes das derivadas, uma equação diferencial parcial pode ser linear, semilinear ou não-linear:

  - Uma equação diferencial parcial é dita semilinear em um domínio $M \in \mathbb{R}^2$, se ela puder ser escrita na forma

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{2.3}$$

onde os coeficientes A, B e C, das derivadas de segunda ordem são funções apenas de x e y e para todo $(x, y) \in M$ pelo menos um dos coeficientes A, B ou C é não nulo, ou seja:

$$A^2(x,y) + B^2(x,y) + C^2(x,y) \neq 0. \tag{2.4}$$

Dessa forma um exemplo de equação diferencial parcial semilinear pode ser dado pela expressão:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sqrt{x^2 - y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2.5}$$

onde o conjunto domínio desta equação é $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 0\}$.

- Uma equação diferencial parcial na forma de (2.3) é dita linear se puder ser escrita na forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0, \tag{2.6}$$

onde A, B, C, D, E, F somente dependem das variáveis independentes x e y e G pode ser constante ou função de x e y. Além disso, para todo $(x, y) \in M$

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0. \tag{2.7}$$

Alguns exemplos de equações diferenciais parciais lineares são

$$\begin{aligned} &x\frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = e^y + e^x, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sen} y + \cos x. \end{aligned} \tag{2.8}$$

- Equações diferenciais parciais não-linerares são aquelas que não obedecem aos critérios anteriores. Eis alguns exemplos:

$$\begin{aligned} &u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ &x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0, \\ &u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

- Uma equação diferencial parcial pode ainda ser classificada como homogênea ou não homogênea

  - Uma equação diferencial parcial não homogênea é aquela que pode ser escrita na forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \tag{2.10}$$

onde os coeficientes A, B, C, D, E, F e G podem ser dependentes das variáveis x e y, da função $u = u(x, y)$ ou das derivadas de primeira ordem de $u = u(x, y)$; também é necessário que $G(x, y) \neq 0$.

– Uma equação diferencial parcial é dita homogênea se puder ser escrita na forma (2.10) mas com $G(x, y) = 0$.

2.2 Problemas Lineares de Primeira Ordem

Vamos agora apresentar uma equação diferencial parcial de primeira ordem linear e em seguida vamos resolvê-la usando a forma clássica de solução através método das características. Este exemplo foi retirado de Iório (2005). Considere a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y, \tag{2.11}$$

sujeita à seguinte condição de contorno:

$$u(x, x) = p(x), x \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

com p uma função conhecida.

Para solução através do método das características , primeiramente é necessário obter as curvas características desta equação. Para isso calcularemos a derivada total da Equação (2.11) em relação a x, já que $y = x$ na condição de contorno.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{2.13}$$

comparando 2.11 com 2.13, nota-se que

$$\frac{dy}{dx} = -3 \tag{2.14}$$

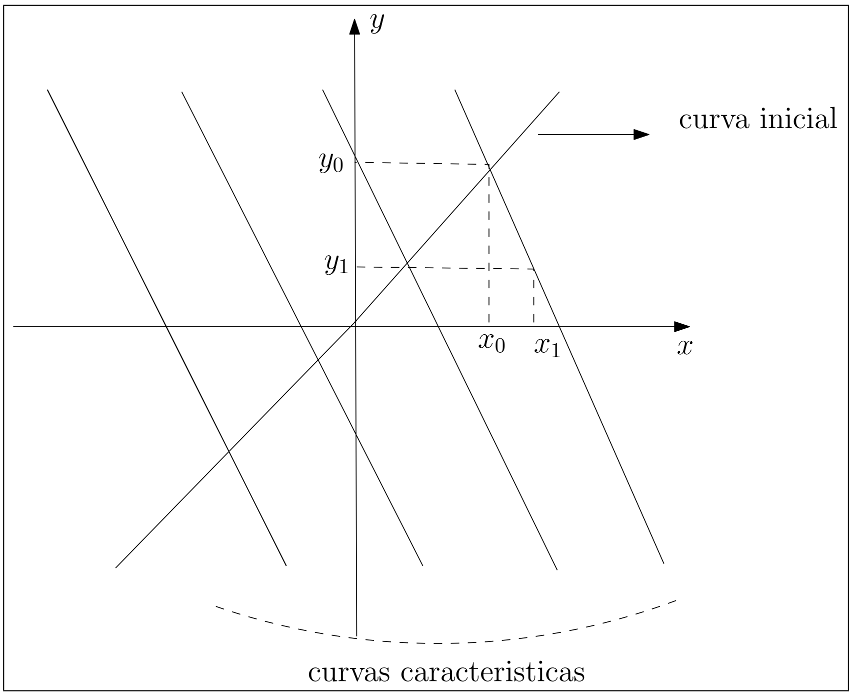

Figura 2.1: Curvas características e condição inicial da Equação (2.11).

e a partir desta observação, podemos concluir que as curvas características da Equação (2.11), são do tipo

$$y = -3x + c \qquad \text{onde } c \text{ é uma constante.} \tag{2.15}$$

Da condição (2.12) podemos concluir que a curva inicial do problema é dada por $y = x$. Para facilitar o entendimento do problema vamos analisar a Figura (2.1), onde podemos visualizar um ponto (x_1, y_1), pelo qual passa a curva característica $y_1 = -3x_1 + c$. Neste caso, c é a constante que caracteriza esta curva, que pode ser dada por $c = y_1 + 3x_1$.

Também pode ser visto na Figura (2.1), um ponto (x_0, y_0), conhecido por interceptar a curva inicial $y = x$. A partir deste ponto e das informações fornecidas pela condição de contorno é possível encontrar

$$x_0 = \frac{y_1 + 3x_1}{4}. \tag{2.16}$$

Para finalmente obter a solução da Equação (2.11) é necessário realizar a integração ao longo das curvas características partindo de x_0 até um x qualquer (x_1), da seguinte forma:

$$u(x,y) = \int_{\frac{y_1+3x_1}{4}}^{x} \operatorname{sen}(\xi) + \cos(-3\xi + c) d\xi + p(x_0) \tag{2.17}$$

onde $p(x_0)$ é um valor conhecido de p dado em (2.12).

Assim, usando (2.16) podemos encontrar,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\cos(x)|_{\frac{y+3x}{4}}^{x} - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(-3x+c)|_{\frac{y+3x}{4}}^{x} + p\left(\frac{y+3x}{4}\right), \\ &= -\cos(x) + \cos\left(\frac{y+3x}{4}\right) - \frac{1}{3}\left\{\operatorname{sen}(-3x+c) - \sin\left[-3\left(\frac{y+3x}{4}\right) + c\right]\right\} \\ &+ p\left(\frac{y+3x}{4}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

usando $c = y + 3x$, encontrado anteriormente, finalmente temos

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\cos(x) + \cos\left(\frac{y+3x}{4}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(-3x+y+3x) \\ &+ \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(-3\frac{y+3x}{4} + y + 3x\right) + p\left(\frac{y+3x}{4}\right), \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= -\cos(x) + \cos\left(\frac{y+3x}{4}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(y) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{-3y-9x}{4} + y + 3x\right) \\ &+ p\left(\frac{y+3x}{4}\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

,

$$u(x,y) = -\cos(x) + \cos\left(\frac{y+3x}{4}\right) - \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}\left(\frac{y+3x}{4}\right)\right] + p\left(\frac{y+3x}{4}\right). \tag{2.21}$$

Simplificando, encontramos a resolução da Equação (2.11)

$$u(x,y) = -\cos(x) + \cos\left(\frac{y+3x}{4}\right) - \frac{1}{3}\sin(y) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{y+3x}{4}\right) + p\left(\frac{y+3x}{4}\right). \tag{2.22}$$

Vimos neste exemplo, que o método das características pode ser utilizado na solução de equações diferenciais parciais lineares e a solução é obtida de maneira simples.

2.3 Problemas Não Lineares de Primeira Ordem

Vamos analisar, agora, uma equação diferencial parcial de primeira ordem não linear. Aqui também será usado o método das características na sua forma clássica, de maneira análoga ao problema resolvido na seção anterior.

A equação analisada é a seguinte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha x^{-5/3}\frac{\partial u}{\partial t} = -\left[\frac{5}{3}x^{-1} + 2\alpha x^{1/3}\right]u \qquad \text{com} \qquad u(x,0) = f(x); \tag{2.23}$$

onde $f(x)$ é uma função qualquer.

Fazendo uma analogia com o primeiro caso, vamos iniciar a resolução deste problema, obtendo a derivada total

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{dx}. \tag{2.24}$$

Vamos comparar a Equação (2.24), com (2.23). Desta forma é possível deduzir que

$$\frac{dt}{dx} = \alpha x^{-5/3}. \tag{2.25}$$

A partir da Equação (2.25), é possível encontrar as curvas características da Equação (2.23) integrando diretamente. A solução desta integração nos fornece

$$t = \frac{-3\alpha x^{-2/3}}{2} + k, \tag{2.26}$$

que são as linhas características do problema (2.23), onde k é a constante que define as várias linhas.

Para solução deste problema vejamos na Figura (2.2) um ponto conhecido (x_0, t_0), onde

$$t_0 = \frac{-3\alpha x_0^{-2/3}}{2} + k, \tag{2.27}$$

mas sabemos da condição inicial que $t_0 = 0$, e assim encontramos

$$x_0 = \left(\frac{2k}{3\alpha}\right)^{-3/2}. \tag{2.28}$$

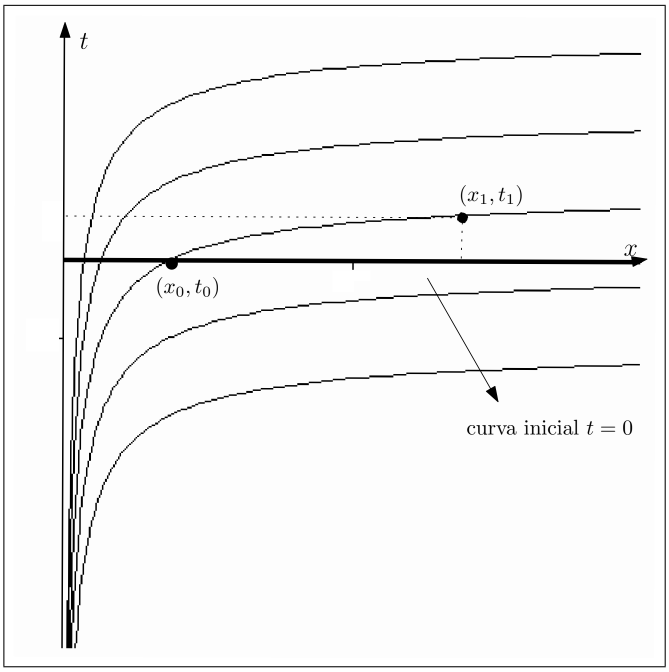

Figura 2.2: Curvas características e condição inicial da Equação (2.23)

Usando um raciocínio análogo para um ponto qualquer das linhas, encontramos

$$t = \frac{-3\alpha x^{-2/3}}{2} + k \tag{2.29}$$

ou

$$k = \frac{2t + 3\alpha x^{-2/3}}{2}. \tag{2.30}$$

Continuando com a solução, vamos integrar a derivada total (2.24) ao longo das linhas características

$$\frac{du}{dx} = -\left[\frac{5}{3}x^{-1} + 2\alpha x^{1/3}\right] u, \tag{2.31}$$

$$\frac{du}{u} = -\left[\frac{5}{3}x^{-1} + 2\alpha x^{1/3}\right] dx \tag{2.32}$$

e assim

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{5}{3}\int_{x_0}^{x} \chi^{-1} d\chi - 2\alpha \int_{x_0}^{x} \chi^{1/3} d\chi + u(x_0, t_0). \tag{2.33}$$

A solução desta integral, nos dá

$$\ln(u) = \frac{-5}{3}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) - \frac{3}{2}\left(x^{4/3} - x_0^{4/3}\right) + f(x_0). \tag{2.34}$$

Exponenciando temos finalmente a solução para o problema (2.23)

$$u = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-5/3} \exp\left(-\frac{3}{2}\left(x^{4/3} - x_0^{4/3}\right)\right) \exp(f(x_0)) \tag{2.35}$$

com $x_0 = \left(\frac{2t+3\alpha x^{-2/3}}{3\alpha}\right)^{-3/2}$.

Vimos nestes exemplos que o método das características pode perfeitamente ser utilizado na solução de equações diferenciais parciais lineares e não lineares, além de vários outros tipos de equações. As soluções obtidas nestas seções nos remetem à idéia de que o método pode ser usado de uma maneira quase que exclusivamente intuitiva e geométrica, e consequentemente de fácil compreensão. Esta simplicidade foi parte da motivação para este trabalho.

Capítulo 3

Solução da Equação da Onda

São muitos os fenômenos que podem ser descritos pela equação da onda. Ela governa o movimento das ondas eletromagnéticas, ondas em água, fluidos supersônicos, pulsação de fluxo sanguíneo, ondas elásticas em sólidos e vibração de cordas e membranas (Greenberg, 1998).

A equação da onda é uma equação do tipo linear de segunda ordem, este foi um dos problemas mais importante do século XVIII. O primeiro a estudá-la foi d'Alambert, seguido de Euler, Daniel Bernouilli e Lagrange. Foram obtidas soluções em diversas formas e a discussão sobre os méritos e as relações entre essas soluções levantou questões fundamentais (como, por exemplo, o que é uma função) que só foram resolvidas no final do século XIX (Iório, 2005).

No capítulo 3 vamos mostrar a solução para a Equação da Onda que foi obtida por d'Alambert, pois esta foi a primeira experiência feita a partir de linhas características, de que se tem notícia.

3.1 A Solução de d'Alambert

A solução clássica obtida por d'Alambert para a equação da onda é uma bela forma de utilização do método das características. Aqui mostra-se um problema de vibração para uma corda infinita, cuja equação governante é a equação da onda.

Seja a equação

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

com as seguintes condições:

$$\phi(x,0) = e^{-x^2} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{3.3}$$

Para simplificar a notação, vamos escrever a Equação (3.1) como

$$c^2\phi_{xx} - \phi_{tt} = 0. \tag{3.4}$$

O primeiro passo para a utilização do método das características em equações hiperbólicas como esta consiste em transformar uma equação de segunda ordem em um sistema de equações lineares de primeira ordem.

Para isso vamos usar a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} u = \phi_x, \\ v = \phi_t. \end{cases} \tag{3.5}$$

Agora, reescrevemos a Equação (3.4), utilizando a mudança de variáveis proposta em (3.5), para dessa forma obtermos o sistema

$$\begin{cases} c^2 u_x - v_t = 0, \\ v_x - u_t = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Este sistema também pode ser representado de forma matricial

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{c^2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Observe que o sistema (3.7) envolve duas equações diferenciais parciais lineares acopladas, ou seja, as equações devem ter como solução duas funções, uma função $u(x,t)$ e outra $v(x,t)$. Para evitar esse problema, o ideal é desacoplar as equações, para isso é necessário diagonalizar a matriz dos coeficientes do sistema (3.7).

Para diagonalizar a matriz dos coeficientes do sistema (3.7), primeiramente é necessário encontrar os autovalores e autovetores da matriz. Assim, temos

$$\lambda_1 = \frac{1}{c} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2 = \frac{-1}{c} \tag{3.8}$$

associados a estes autovalores obtemos os autovetores

$$v_1 = (\frac{-1}{c}, 1) \qquad \text{e} \qquad v_2 = (\frac{1}{c}, 1). \tag{3.9}$$

Agora é possível reescrever o sistema (3.7) na base dos autovetores encontrados

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{V} + \vec{\tilde{A}}\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} = 0 \tag{3.10}$$

onde $\vec{V} = (\xi, \eta)$, tem como representação matricial o seguinte sistema:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Vale lembrar que (ξ, η), são as componentes do vetor das incógnitas $\vec{V}$, na base dos autovetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, enquanto que (u, v), são as componentes deste mesmo vetor na base canônica. Agora precisamos encontrar uma expressão para ξ e para η. Isto é possível efetuando a seguinte mudança de base

$$\xi\vec{v_1} + \eta\vec{v_2} = \vec{V}, \tag{3.12}$$

assim

$$\xi\left(\frac{-1}{c}, 1\right) + \eta\left(\frac{1}{c}, 1\right) = (u, v) \tag{3.13}$$

produz o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{-\xi+\eta}{c} = u, \\ \\ \xi + \eta = v, \end{cases} \tag{3.14}$$

ou, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{c} & \frac{1}{c} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Finalmente obtemos

$$\xi = \frac{v - uc}{2} \tag{3.16}$$

e

$$\eta = \frac{v + uc}{2}. \tag{3.17}$$

Voltando ao sistema (3.11), vamos desacoplar as equações

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{c} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} & = 0, \\ \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} & = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Vamos analisar a primeira equação do sistema (3.19):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \tag{3.20}$$

Primeiramente, é necessária uma condição inicial. Sabe-se de (3.2) e (3.3) , que $\phi(x,0) = e^{-x^2}$ e $\phi_t(x,0) = 0$, também sabe-se de (3.5), que $u = \phi_x$ e que $v = \phi_t$. Ainda de (3.16), tem-se $\xi = \frac{v-uc}{2}$. Com isso, pode-se concluir que

$$\xi(x,0) = cxe^{-x^2} \tag{3.21}$$

é uma condição inicial para o problema (3.20).

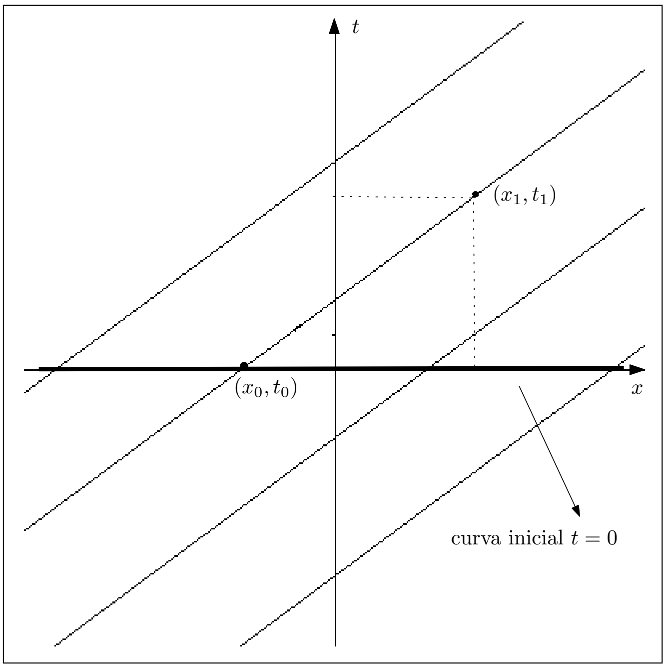

Figura 3.1: Curvas características e condição inicial da Equação (3.20)

Agora é possível resolvê-lo usando o método das características. Procedendo de maneira análoga à dos capítulos anteriores, começaremos com uma derivada total para ξ em x

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{dt}{dx}. \tag{3.22}$$

Comparando (3.20) com (3.22), verifica-se que $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}$. Portanto as curvas características do problema, são do tipo

$$t = \frac{x}{c} + k, \tag{3.23}$$

onde k é a constante que vai definir cada uma das curvas características.

Na Figura (3.1) está representado um ponto (x_1, t_1), pelo qual passa a curva característica $t_1 = \frac{x_1}{c} + k$, onde k caracteriza esta curva e é dado por

$$k = \frac{ct_1 - x_1}{c}. \tag{3.24}$$

Analisando agora o ponto (x_0, t_0) é possível encontrar uma expressão para x_0 sabendo que este, intercepta a curva inicial em $t_0 = 0$. Assim fica claro que o ponto x_0 procurado é dado por $x_0 = -kc$, mas como $k = \frac{ct_1 - x_1}{c}$, então

$$x_0 = x - tc. \tag{3.25}$$

Para resolver a Equação (3.20) basta, agora integrar a derivada total (3.22) ao longo das curvas características desde x_0 até um x qualquer (x_1):

$$\xi(x,t) = \int_{x_0}^{x_1} 0dx + \xi(x_0, t_0) \tag{3.26}$$

Assim, de 3.21 obtém-se:

$$\xi(x,t) = cx_0 e^{-x_0^2} \tag{3.27}$$

Sabe-se que $x_0 = x - tc$, e assim fica fácil encontrar a solução da equação (3.20), dada por

$$\xi(x,t) = c(x - tc)e^{-(x-tc)^2} \tag{3.28}$$

Ainda no sistema (3.19) é necessária a análise da segunda equação:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \tag{3.29}$$

Como antes, precisamos atribuir uma condição inicial a esta equação. Sabe-se de (3.2) e (3.3) , que $\phi(x,0) = e^{-x^2}$ e $\phi_t(x,0) = 0$; também sabe-se de (3.5), que $u = \phi_x$ e que $v = \phi_t$. Ainda de (3.17), tem-se que $\eta = \frac{v+uc}{2}$; com isso é possível concluir que

$$\eta(x,0) = -cxe^{-x^2} \tag{3.30}$$

é uma condição inicial para o problema (3.29).

Agora é possível resolver este problema usando o método das características.

Inicialmente encontra-se uma derivada total para η em relação x:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{dt}{dx}. \tag{3.31}$$

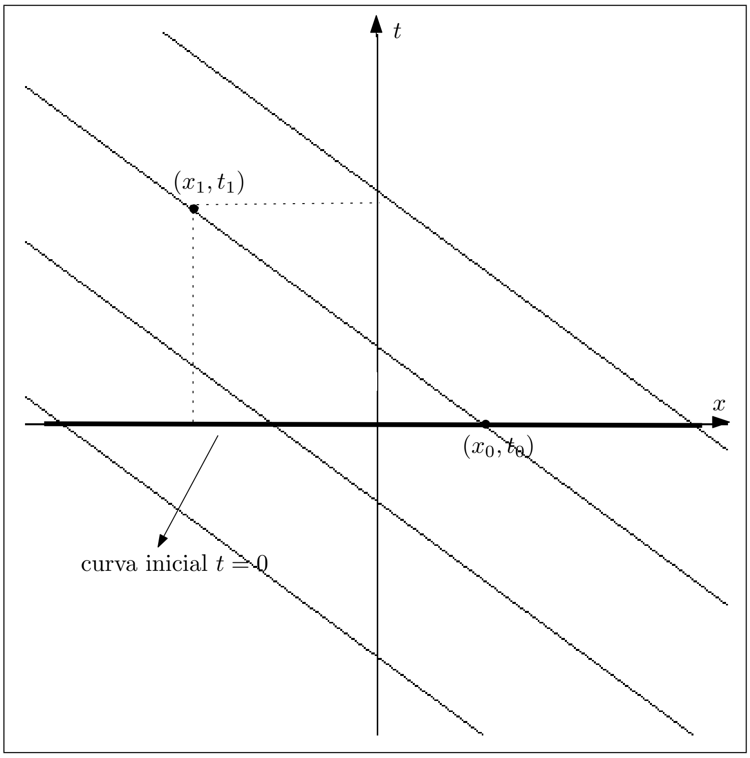

Figura 3.2: Curvas características e condição inicial da Equação (3.29)

Comparando (3.29) com (3.31), verifica-se que $\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{c}$, e que as curvas características do problema são do tipo $t = \frac{-x}{c} + k$, onde k é a constante que vai definir uma curva característica qualquer.

O problema está representado na Figura (3.1) onde há um ponto(x_1, t_1), pelo qual passa a curva característica $t_1 = \frac{-x_1}{c} + k$, onde k caracteriza esta curva e é dado por

$$k = \frac{ct_1 + x_1}{c}. \tag{3.32}$$

Analisando, agora o ponto (x_0, t_0) é possível encontrar uma expressão para x_0 sabendo que este, intercepta a curva inicial em $t_0 = 0$. Assim fica claro que o ponto x_0 procurado é dado por $x_0 = kc$, mas como $k = \frac{ct_1+x_1}{c}$, então

$$x_0 = x + tc. \tag{3.33}$$

Portanto a solução da equação (3.20) pode ser obtida integrando ao longo das curvas características desde x_0 até x_1.

$$\eta(x,t) = \int_{x_0}^{x_1} 0dx + \eta(x_0, t_0) \tag{3.34}$$

Assim, de (3.30) obtemos:

$$\eta(x,t) = -cx_0 e^{-x_0^2}. \tag{3.35}$$

Sabe-se que $x_0 = x + tc$, logo a solução da equação (3.29) é dada por

$$\eta(x,t) = -c(x+tc)e^{-(x+tc)^2}. \tag{3.36}$$

Agora voltamos ao início do problema para descobrir, quem é $\phi(x,t)$.

Tem-se em (3.5) que $u = \phi_x$ e que $v = \phi_t$; assim, é possível encontrar ϕ integrando u e v, da seguinte maneira:

$$\phi(x,t) = \begin{cases} \int udx + f(t), \\ \\ \int cvdt + g(x). \end{cases} \tag{3.37}$$

Inicialmente encontra-se u, sabendo de (3.14) que

$$\frac{-\xi + \eta}{c} = u. \tag{3.38}$$

Então de (3.28) e (3.36) tem-se

$$u = -(x-tc)e^{-(x-tc)^2} - (x+tc)e^{-(x+tc)^2}. \tag{3.39}$$

Para resolver, basta integrar u:

$$\phi(x,t) = \int \Big(-(x-tc)e^{-(x-tc)^2} - (x+tc)e^{-(x+tc)^2}\Big)dx + f(t), \tag{3.40}$$

$$\phi(x,t) = \frac{e^{-(-x+tc)^2} - e^{-(x+tc)^2}}{2} + f(t). \tag{3.41}$$

Para encontrar v usa-se raciocínio análogo. Sabendo de (3.14) que

$$\xi + \eta = v, \tag{3.42}$$

então de (3.28) e (3.36) encontra-se

$$v = c(x - tc)e^{-(x-tc)^2} - c(x + tc)e^{-(x+tc)^2}. \tag{3.43}$$

Para resolver basta integrar v.

$$\phi(x, t) = \int \Big(c(x - tc)e^{-(x-tc)^2} - c(x + tc)e^{-(x+tc)^2}\Big)dt + g(x). \tag{3.44}$$

Assim

$$\phi(x, t) = \frac{e^{-(-x+tc)^2} - e^{-(x+tc)^2}}{2} + g(x). \tag{3.45}$$

Voltando em (3.37), tem-se

$$\phi(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{-(-x+tc)^2} - e^{-(x+tc)^2}}{2} + f(t) \\ \\ \frac{e^{-(-x+tc)^2} - e^{-(x+tc)^2}}{2} + g(x) \end{cases}. \tag{3.46}$$

Para encontrar a solução final precisamos de uma condição para definir $f(t)$ e $g(x)$. Neste intuito recorremos à condição (3.3)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = cxe^{-x^2} - cxe^{-x^2} = 0. \tag{3.47}$$

Desta forma podemos encontrar $f(t) = g(x) = 0$.

Portanto a solução obtida por d'Alambert para a Equação da Onda (3.1) é dada por

$$\phi(x, t) = \frac{e^{-(-x+tc)^2} - e^{-(x+tc)^2}}{2}. \tag{3.48}$$

A solução (3.48) obtida através do método das características é a forma mais tradicional de utilização deste método. Ela foi obtida facilmente, devido ao fato de que as integrais envolvidas eram extremamente simples. Nos próximos capítulos, veremos casos onde a integração não ocorre com essa facilidade.

Capítulo 4

O Problema da Difusão

A equação da difusão,

$$D\phi_{xx} = \phi_t, \tag{4.1}$$

também conhecida como equação do calor é utilizada para descrever situações físicas como a condução de calor em copos sólidos, difusão de fluidos e outros processos semelhantes.

Esta é uma equação do tipo parabólica, para a qual não se consegue obter uma solução analítica usando o método das características em sua forma clássica. Este fato será verificado neste capítulo.

Neste capítulo também será mostrada uma maneira de se analisar o comportamento das curvas características de um problema parabólico. Nessa abordagem, veremos uma nova forma de se utilizar o método das características e, com isso, talvez possamos evoluir para uma maneira de resolução através de uma modificação deste método.

4.1 O Método das Características em sua Forma Clássica

Vamos nesta seção tentar utilizar o método das características na sua forma clássica para resolver um problema de difusão e com isso mostrar porque não é possível encontrar tal solução.

Iniciaremos a solução de forma análoga à utilizada por d'Alambert na solução da equação da onda, mas ao invés de utilizar a equação da difusão (4.1), vamos utilizar uma equação mais completa

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} = \phi_t, \tag{4.2}$$

onde A, B e C são funções de x e t e $A \neq 0$. Procedendo de maneira análoga à que foi utilizada na equação da onda, vamos propor a mesma mudança de variáveis:

$$\begin{cases} u = \phi_x, \\ v = \phi_t. \end{cases} \tag{4.3}$$

Agora utilizaremos a mudança de variáveis (4.3) na Equação (4.2), produzindo o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} Au_x + 2Bu_t + Cv_t = v, \\ \qquad\qquad v_x - u_t = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Dividindo a primeira equação por A, obtém-se:

$$\begin{cases} u_x + 2B/Au_t + C/Av_t = v/A, \\ \qquad\qquad\qquad v_x - u_t = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Vamos agora escrever o sistema (4.5) matricialmente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2B/A & C/A \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v/A \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Sabemos que na equação da difusão (4.1), temos $B = 0$, $C = 0$ e $A = D$; assim, o sistema fica

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v/D \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Seguindo a metodologia utilizada na solução da onda, o próximo passo seria encontrar os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes do sistema (4.7) para que fosse possível a formulação de um sistema desacoplado de duas equações lineares de primeira ordem. Para isso precisamos diagonalizar a matriz dos coeficientes do sistema (4.7):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Mas nesse caso, fica claro que a matriz dos coeficientes só produz um autovalor $\lambda = 0$. Associado a este temos dois vetores

$$\vec{v_1} = (0,0) \qquad \text{e} \qquad \vec{v_2} = (1,0). \tag{4.9}$$

Por definição (Leon, 1999) o vetor nulo , não pode ser considerado um autovetor e desta maneira o sistema (4.7), possui apenas um autovetor, o que impossibilita sua diagonalização.

Sendo assim, não é possível montar um sistema desacoplado, tornando impossível a resolução da equação da difusão usando o método das características.

Para resolver este impasse nosso foco agora passa a ser não mais a solução da equação da difusão, mas o estudo do comportamento da solução da equação da difusão usando um "pseudo " método das curvas características.

4.2 Primeiro Problema de difusão

Seja o seguinte problema :

$$D\phi_{xx} = \phi_t \tag{4.10}$$

com as seguintes condições inicias

$$\phi(x,0) = 0 \tag{4.11}$$

$$\phi(\infty,t) = 0 \tag{4.12}$$

$$\phi(0,t) = \phi_0. \tag{4.13}$$

Sabe-se que o método das características aplicado na sua forma clássica não resolve este problema. Entretanto, é possível analisar o comportamento da solução deste problema sob a ótica do método das características.

Vamos iniciar de maneira análoga à utilizada por d'Alambert na equação da onda, usando uma equação mais completa

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} = \phi_t. \tag{4.14}$$

Vamos propor novamente a mesma mudança de variáveis:

$$\begin{cases} u = \phi_x, \\ v = \phi_t. \end{cases} \tag{4.15}$$

Usando a mudança proposta, escrevemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} Au_x + 2Bu_t + cv_t = v, \\ \qquad\qquad v_x - u_t = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

Para que seja possível no futuro a obtenção de dois autovalores associados à dois autovetores, aqui vamos dividir a primeira equação por A, e acrescentar na segunda o termo v_t a ambos os lados da igualdade, para desta forma obtermos

$$\begin{cases} u_x + 2B/Au_t + C/Av_t = v/A, \\ \qquad\qquad v_x + v_t - u_t = v_t. \end{cases} \tag{4.17}$$

Vamos agora escrever o sistema (4.17), matricialmente

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2B/A & C/A \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v/A \\ v_t \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Sabemos que na equação da difusão (4.10), temos $B = 0$, $C = 0$ e $A = D$, assim, o sistema fica

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{D} \\ v_t \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Nossa intenção é transformar o sistema (4.19) em um sistema de duas equações ordinárias, desacopladas. Para isso, vamos diagonalizá-lo.

Inicialmente, calculamos os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{4.20}$$

donde encontramos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, que são os autovalores da matriz dos coeficientes. Agora vamos calcular os autovetores, primeiro para $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Donde tiramos $v_i = v_{ii}$ e portanto

$$\vec{v_1} = (1, 1), \tag{4.22}$$

é um autovetor do sitema (4.19). Utilizando o segundo autovalor $\lambda = 1$, temos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \tag{4.23}$$

neste caso temos $\vec{v_i} = 0$ e que $\vec{v_{ii}}$ é qualquer, portanto

$$\vec{v_2} = (0, 1) \tag{4.24}$$

é o outro autovetor do sistema (4.19).

Continuando com a diagonalização queremos agora reescrever o sistema (4.19), na base dos autovetores encontrados:

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{V} + \underline{\underline{A}}\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} = \vec{F}. \tag{4.25}$$

Na Equação (4.25), temos $\vec{V} = (\xi, \eta)$, onde ξ e η, são as componentes de $\vec{V}$ na base dos autovetores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, $\underline{\underline{A}}$ é a matriz diagonalizada do sistema e $\vec{F} = (\psi, \tau)$, onde ψ e τ, são também as componentes de $\vec{F}$, na base dos autovetores.

Assim, podemos escrever finalmente o sistema diagonalizado

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \tau \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \tau \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

ou então

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial x} = \psi, \\ &\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \tau. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Para continuar a solução precisamos agora das expressões de ψ e τ. Para isso, vamos encontrar as soluções analíticas da equação (4.10).

4.2.1 A Solução Analítica por Transformada de Laplace

Para resolver a equação da difusão (4.10) sujeita às condições (4.11), (4.12) e (4.13), vamos usar transformada de Laplace.

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{a} = \underbrace{D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}}_{b} \tag{4.29}$$

Começando com a parte a:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = s\bar{\phi}(x,s) - \phi(x,0), \tag{4.30}$$

pela condição (4.11), podemos escrever

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = s\bar{\phi}(x,s). \tag{4.31}$$

Na parte b da equação, aplicamos também a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left(D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) = D\int_0^\infty \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}e^{-st}dt \tag{4.32}$$

$$\mathcal{L}\left(D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty \phi e^{-st}dt \tag{4.33}$$

$$\mathcal{L}\left(D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) = D\frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2}. \tag{4.34}$$

Agora juntamos a e b, já transformados e obtemos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$D\frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} - s\bar{\phi} = 0. \tag{4.35}$$

Esta equação diferencial ordinária, pode facilmente ser resolvida, e sua solução nos dá

$$\bar{\phi}(x,s) = Ae^{\sqrt{\frac{s}{D}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x} \tag{4.36}$$

onde A e B, são constantes à definir.

De acordo com a condição (4.12), sabemos que $A = 0$, para não "explodir" ao infinito, só nos resta encontrar B. Para isso, vamos aplicar a transformada também da condição (4.13)

$$\phi(0,t) = \phi_0 \rightarrow \bar{\phi}(0,s) = \frac{\phi_0}{s}. \tag{4.37}$$

Assim encontramos que $B = \frac{\phi_0}{s}$. Voltando em (4.36), temos:

$$\bar{\phi}(x,s) = \frac{\phi_0}{s}e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x}. \tag{4.38}$$

Agora, para finalmente encontrar $\phi(x,t)$, basta aplicar a transformada inversa usando o teorema da convolução

$$\phi(x,t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\phi_0}{s}\right)}_{c} * \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x}\right)}_{d}. \tag{4.39}$$

Primeiro vamos analisar a parte c

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\phi_0}{s}\right) = \phi_0. \tag{4.40}$$

Agora analisaremos a parte d

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x}\right) = \frac{a}{\sqrt{\pi t^3}}e^{\frac{-a^2}{t}} \tag{4.41}$$

sendo $a = \frac{x}{2\sqrt{D}}$.

Assim podemos calcular finalmente $\phi(x,t)$

$$\phi(x,t) = \int_0^t \frac{x\phi_0}{2\sqrt{\pi D}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4D\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}}d\tau. \tag{4.42}$$

A integral acima, pode ser calculada usando um programa de manipulação simbólica. Sua solução nos fornece

$$\phi(x,t) = \phi_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right), \tag{4.43}$$

é a solução analítica para a Equação (4.10).

4.2.2 As Componentes do Vetor $\vec{F}$

Já sabemos que ψ e τ, são as componentes do vetor (u, v), na base dos autovetores já anteriormente encontrados, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$. Vamos agora definir essas componentes, iniciando com a seguinte mudança de base

$$\psi\vec{v_1} + \tau\vec{v_2} = (v/D, v_t). \tag{4.44}$$

Assim temos de (4.22) e (4.24), que

$$\psi(1,1) + \tau(0,1) = (v/D, v_t). \tag{4.45}$$

Portanto

$$\psi = \frac{v}{D} \tag{4.46}$$

e

$$\tau = v_t - \frac{v}{D} \tag{4.47}$$

De acordo com (4.15), sabemos que $v = \phi_t$ e utilizando a solução analítica (4.43), podemos facilmente obter v, derivando a solução analítica em relação a t.

$$v = \frac{xe^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{2t\sqrt{\pi Dt}}. \tag{4.48}$$

Assim, por (4.46), temos

$$\psi = \frac{xe^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{2Dt\sqrt{\pi Dt}}. \tag{4.49}$$

De maneira análoga podemos obter τ: de (4.47) e (4.48) temos que

$$\tau = \frac{xe^{\frac{-x^2}{4Dt}}(x^2 - 6Dt - 4t^2)}{8Dt^3\sqrt{\pi Dt}}. \tag{4.50}$$

Os resultados (4.49), (4.50) foram obtidos com base na solução analítica da equação da difusão. O intuito de encontrar tais resultados é a sua utilização na solução do sistema (4.28).

4.2.3 As Componentes do Vetor $\vec{V}$

Para fazer as comparações de resultados futuros vamos obter também ξ e η, componentes do vetor $\vec{V}$, na base dos autovetores já anteriormente encontrados. Para isso, iniciamos com a seguinte mudança de base

$$\xi\vec{v_1} + \eta\vec{v_2} = (u, v) \tag{4.51}$$

assim, de (4.22) e (4.24), encontramos

$$\xi(1,1) + \eta(0,1) = (u,v), \tag{4.52}$$

ou como sistema de equações

$$\begin{aligned}\xi &= u,\\ \xi + \eta &= v.\end{aligned} \tag{4.53}$$

Portanto

$$\xi = u \tag{4.54}$$

e

$$\eta = v - u. \tag{4.55}$$

Agora precisamos encontrar uma expressão para ξ e η; para tanto, usaremos a solução analítica que foi obtida por transformada de Laplace em (4.43). Também vamos precisar das mudanças de variáveis (4.15), feitas no início do capítulo.

Sabemos que $\xi = u$ e que $u = \phi_x$, então derivando a solução analítica podemos obter

$$\xi(x,t) = \frac{-e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi D t}}. \tag{4.56}$$

Analogamente obtemos η, sabendo que $\eta = v - u$ e que $v = \phi_t$, temos

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4Dt}}(x + 2t)}{2t\sqrt{\pi D t}}. \tag{4.57}$$

Estes resultados (4.56) e (4.57) foram obtidos com base na solução analítica, encontrada anteriormente. O intuito de se obter tais valores, é compará-los com a solução que ainda vamos obter para o sistema (4.28), usando o método das características. No final da próxima seção, podemos verificar que a solução que foi obtida para as equações deste sistema, são idênticas à estas que foram obtidas da solução analítica.

4.3 Resolução do Sistema

Agora podemos voltar ao sistema (4.28) e resolver as duas equações deste sistema de maneira separada.

Primeiramente analisaremos a primeira equação do sistema

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \psi. \tag{4.58}$$

Já sabemos de (4.49) que há uma expressão para ψ, portanto podemos reescrever a equação (4.58), como:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{x e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{2Dt\sqrt{\pi Dt}}. \tag{4.59}$$

Antes de resolvê-la precisamos de uma condição inicial. Para encontrar esta condição é necessário novamente voltar à solução analítica do problema, mas especificamente em ξ, já encontrado anteriormente (4.56). Assim temos

$$\xi(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{-e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi Dt}}, \tag{4.60}$$

desta forma, a condição inicial é dada por

$$\xi(x,0) = 0. \tag{4.61}$$

Agora podemos resolver a equação (4.58), simplesmente integrando

$$\xi(x,t) = \int \frac{\chi e^{\frac{-\chi^2}{4Dt}}}{2Dt\sqrt{\pi Dt}} d\chi + f(t), \tag{4.62}$$

$$\xi(x,t) = \frac{-e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi Dt}} + f(t), \tag{4.63}$$

onde $f(t)$ é uma função à ser determinada pela condição inicial.

Passando a condição (4.61), obtemos $f(t) = 0$ e consequentemente

$$\xi(x,t) = \frac{-e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi D t}}, \tag{4.64}$$

é a solução para a primeira equação do sistema (4.28).

Como mencionando anteriormente, esta solução, coincide com a que foi encontrada analiticamente em (4.56).

Vamos agora analisar a segunda equação do sistema (4.28):

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \tau \tag{4.65}$$

Já sabemos de (4.50) que há uma expressão para τ, assim é possível reescrever a Equação (4.65), como

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x e^{\frac{x^2}{4Dt}}(x^2 - 6Dt - 4t^2)}{8Dt^3\sqrt{\pi D t}}. \tag{4.66}$$

Para resolver esta equação é necessária uma condição inicial. Encontrar esta condição é possível se retornarmos à solução analítica do problema, mas especificamente em η, já encontrado anteriormente (4.57). Assim temos

$$\eta(x,0) = \lim_{t \to 0} \frac{e^{\frac{-x^2}{4Dt}}(x+2t)}{t\sqrt{\pi D t}}, \tag{4.67}$$

desta forma, a condição inicial é dada por

$$\eta(x,0) = 0. \tag{4.68}$$

Agora podemos resolver a Equação (4.65) usando o método das características. Vamos começar encontrando uma derivada total em relação a t:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{dt}{dt}, \tag{4.69}$$

comparando a derivada total (4.69) com (4.66), temos

$$\frac{dx}{dt} = 1. \tag{4.70}$$

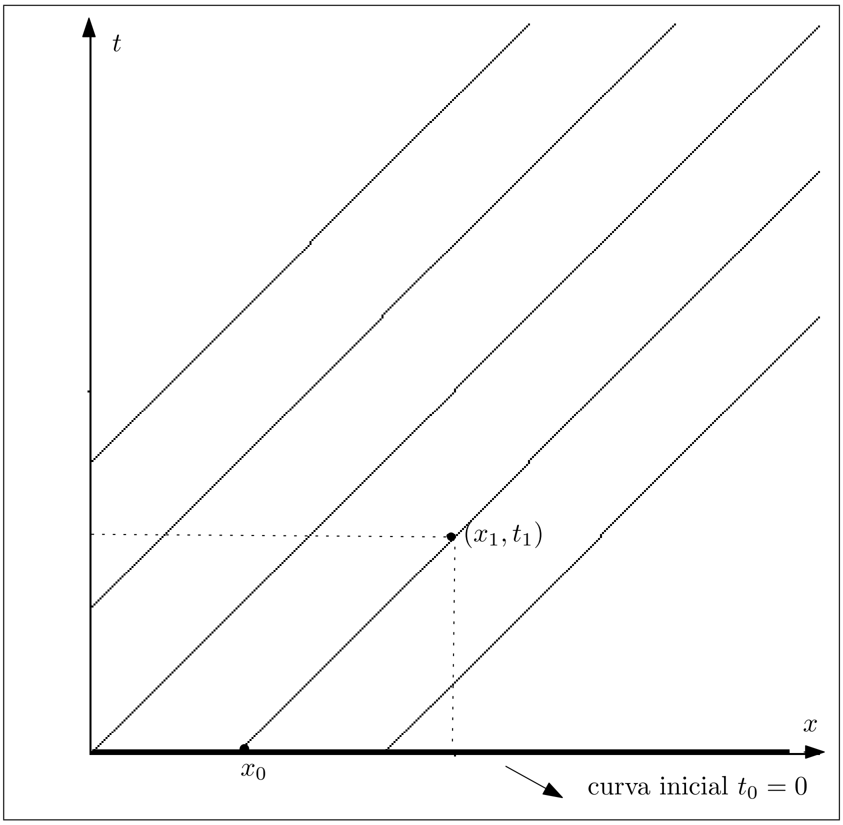

Figura 4.1: Curvas características e condição inicial da Equação (4.66)

Integrando, obtemos

$$x = t + k, \tag{4.71}$$

que são as curvas características da equação (4.66). Nesta expressão k é a constante que define a curva.

Temos na Figura (4.1), a representação das curvas (4.71), também está representado um ponto (x_1, t_1), por onde passa a curva $t_1 = x_1 + k$, a partir deste ponto podemos encontrar $k = x_1 - t_1$ assim k pode ser definido para qualquer ponto como

$$k = x - t. \tag{4.72}$$

Para resolver a equação basta agora integrar ao longo das curvas características, ou seja

$$\eta(x,t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d\eta}{dt} dt \tag{4.73}$$

e comparando (4.69) com (4.66) e ainda lembrando da condição inicial $t_0 = 0$ temos que

$$\eta(x,t) = \int_0^t \frac{x e^{\frac{x^2}{4D\theta}}(x^2 - 6D\theta - 4\theta^2)}{8D\theta^3\sqrt{\pi D\theta}} d\theta \tag{4.74}$$

Como estamos integrando em θ devemos colocar x como função de θ, para isto usamos as curvas características (4.71), obtendo, desta forma, a seguinte integral

$$\eta(x,t) = \int_0^t \frac{(\theta + k)e^{\frac{(\theta+k)^2}{4D\theta}}((\theta + k)^2 - 6D\theta - 4\theta^2)}{8D\theta^3\sqrt{\pi D\theta}} d\theta. \tag{4.75}$$

Desta maneira, a solução da equação (4.65), depende apenas da solução da integral acima, que expandida, fica

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{(\theta + k)^3 e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{7/2}} - \frac{6D(\theta + k)e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{5/2}} - \frac{4(\theta + k)e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}} d\theta. \tag{4.76}$$

A solução da integral (4.76), até onde sabemos, não foi encontrada nas bibliografias procuradas, tais como Gradshteyn e Ryzhik's (2007). Como não havia solução pré-definida, tentamos encontrar sua solução de diversas maneiras, tais como:

- Usando programação simbólica: Tentamos a solução desta integral utilizando os programas de manipulação simbólica *Maple* e *Mathematica*. Estes se mostraram ineficientes para este tipo de integração.

- Usando expansão em série : Também tentamos a solução, expandindo o integrando em séries de potências. Mas este método também não funcionou, pois havia uma singularidade que se propagava pela série. Esta tentativa de solução, pode ser vista no Apêndice A.

Assim, a única forma que encontramos para resolver a integral (4.76) foi da maneira que será descrita agora:

Vamos começar resolvendo a integral indefinida

$$I_0 = \int \frac{(\theta + k)^3 e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{7/2}} - \frac{6D(\theta + k)e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{5/2}} - \frac{4(\theta + k)e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}} d\theta. \tag{4.77}$$

Os próximos passos definem as simplificações matemáticas necessárias

$$
\begin{aligned}
I_0 =& \int \frac{1}{\theta^{3/2}}(\theta+k)\left(\frac{(\theta+k)^2}{\theta^2}-\frac{6D}{\theta}-4\right)e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}d\theta\\
=& \int \frac{1}{\theta^{3/2}}(\theta+k)\left(\frac{\theta^2+2k\theta+k^2}{\theta^2}-\frac{6D}{\theta}-4\right)e^{\frac{-\theta^2-2\theta k-k^2}{4D\theta}}d\theta\\
=& \int \frac{1}{\theta^{3/2}}(\theta+k)\left(1+\frac{2k}{\theta}+\frac{k^2}{\theta^2}-\frac{6D}{\theta}-4\right)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k}{2D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta\\
=& e^{\frac{-k}{2D}}\int \frac{1}{\theta^{3/2}}(\theta+k)\left(-3+\frac{(2k-6D)}{\theta}+\frac{k^2}{\theta^2}\right)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

$$
\begin{aligned}
I_0 =& e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\theta(-3)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta + e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}(2k-6D)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta\\
&+e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\frac{k^2}{\theta}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta + e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}(-3k)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta\\
&+e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}k\frac{(2k-6D)}{\theta}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta + e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\frac{k^3}{\theta^2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta
\end{aligned}
\tag{4.79}
$$

$$
\begin{aligned}
I_0 =& -3e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\theta e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta + (-k-6D)e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta\\
&+(3k^2-6Dk)e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\frac{1}{\theta}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta + k^3e^{\frac{-k}{2D}}\underbrace{\int \theta^{\frac{-3}{2}}\frac{1}{\theta^2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta}_{I_1}.
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

Vamos agora analisar apenas a parte I_1

$$
I_1 = \int \theta^{\frac{-3}{2}}\frac{1}{\theta^2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta \tag{4.81}
$$

para resolver esta parte, vamos encontrar o diferencial:

$$
d\left(e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}\right) = \frac{k^2}{4D\theta^2}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta. \tag{4.82}
$$

Vamos substituir (4.82) em (4.81), mas para isso, é preciso inserir um termo constante dentro e fora da integral fazendo

$$
I_1 = \frac{4D}{k^2}\int \theta^{\frac{-3}{2}}e^{\frac{-\theta}{4D}}\frac{k^2}{4D\theta^2}e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}d\theta, \tag{4.83}
$$

substituindo o diferencial, temos

$$I_1 = \frac{4D}{k^2}\int \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} d\left(e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}\right). \tag{4.84}$$

Continuando com a solução vamos fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$u = \theta^{\frac{-3}{2}} \qquad ; \qquad v = e^{\frac{-\theta}{4D}} \qquad ; \qquad dw = d\left(e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}\right)$$

então

$$du = \frac{-3}{2}\theta^{\frac{-5}{2}} d\theta \qquad ; \qquad dv = \frac{-1}{4D} e^{\frac{-\theta}{4D}} d\theta \qquad ; \qquad w = e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}.$$

Do produto triplo, temos

$$\int uvdw = uvw - \int uwdv - \int vwdu. \tag{4.85}$$

Aplicando (4.84) em (4.85) e usando a mudança de variáveis acima, temos

$$I_1 = \frac{4D}{k^2}\left(\theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} - \int \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}\left(\frac{-1}{4D}\right) e^{\frac{-\theta}{4D}} d\theta - \int e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}\left(\frac{-3}{2}\right)\theta^{\frac{-5}{2}} d\theta\right) \tag{4.86}$$

simplificando

$$I_1 = \frac{4D}{k^2}\theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} + \frac{1}{k^2}\int \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta + \frac{6D}{k^2}\int \theta^{\frac{-3}{2}} \frac{1}{\theta} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta. \tag{4.87}$$

Voltamos agora em (4.80) para substituir (4.87), assim, temos

$$\begin{aligned} I_0 =& -3e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\theta e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta + (-k-6D)e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta \\ &+(3k^2-6Dk)e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\frac{1}{\theta} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta \\ &+k^3 e^{\frac{-k}{2D}}\left(\frac{4D}{k^2}\theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} + \frac{1}{k^2}\int \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta + \frac{6D}{k^2}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\frac{1}{\theta} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta\right). \end{aligned} \tag{4.88}$$

Simplificando temos:

$$\begin{aligned} I_0 =& -3e^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}}\theta e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta - 6De^{\frac{-k}{2D}}\int \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta \\ &+3k^2 e^{\frac{-k}{2D}}\underbrace{\int \theta^{\frac{-3}{2}}\frac{1}{\theta} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta}_{I_2} + 4kDe^{\frac{-k}{2D}}\theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Vamos agora analisar I_2

$$I_2 = \int \theta^{\frac{-3}{2}} \frac{1}{\theta} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta. \tag{4.90}$$

Novamente vamos encontrar o diferencial

$$d\left(e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}\right) = \frac{k^2}{4D\theta^2} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta \tag{4.91}$$

então podemos escrever I_2 de maneira análoga à utilizada em I_1 como sendo

$$\begin{aligned} I_2 =& \frac{4D}{k^2} \int \theta^{\frac{-3}{2}} \theta e^{\frac{-\theta}{4D}} \frac{k^2}{4D\theta^2} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta \\ =& \frac{4D}{k^2} \int \theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} \frac{k^2}{4D\theta^2} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta \\ =& \frac{4D}{k^2} \int \theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} d\left(e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}\right). \end{aligned} \tag{4.92}$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned} u = \theta^{\frac{-1}{2}} \qquad &; \qquad v = e^{\frac{-\theta}{4D}} \qquad ; \qquad dw = d\left(e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}\right) \\ du = \frac{-1}{2}\theta^{\frac{-3}{2}} d\theta \qquad &; \qquad dv = \frac{-1}{4D} e^{\frac{-\theta}{4D}} d\theta \qquad ; \qquad w = e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}. \end{aligned}$$

Aplicando em (4.85), temos

$$I_2 = \frac{4D}{k^2} \left(\theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} - \int \theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} \left(\frac{-1}{4D}\right) e^{\frac{-\theta}{4D}} d\theta - \int e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} \left(\frac{-1}{2}\right) \theta^{\frac{-3}{2}} d\theta \right); \tag{4.93}$$

simplificando,

$$I_2 = \frac{4D}{k^2} \theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} + \frac{1}{k^2} \int \theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} e^{\frac{-\theta}{4D}} d\theta + \frac{2D}{k^2} \int e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} \theta^{\frac{-3}{2}} d\theta. \tag{4.94}$$

Substituindo (4.94) em (4.89), temos

$$\begin{aligned} I_0 =& -3e^{\frac{-k}{2D}} \int \theta^{\frac{-3}{2}} \theta e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta - 6De^{\frac{-k}{2D}} \int \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta \\ &+3k^2 e^{\frac{-k}{2D}} \left(\frac{4D}{k^2} \theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} + \frac{1}{k^2} \int \theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} e^{\frac{-\theta}{4D}} d\theta + \frac{2D}{k^2} \int e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} \theta^{\frac{-3}{2}} d\theta \right) \\ &+4kDe^{\frac{-k}{2D}} \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}. \end{aligned} \tag{4.95}$$

Simplificando, temos:

$$
\begin{aligned}
I_0 =& \underbrace{(-3+3k^2\frac{1}{k^2})}_{a} e^{\frac{-k}{2D}} \int \theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta + \underbrace{(-6D+3k^2\frac{2D}{k^2})}_{b} e^{\frac{-k}{2D}} \int \theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} d\theta \\
&+12De^{\frac{-k}{2D}}\theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} + 4kDe^{\frac{-k}{2D}}\theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}. \qquad (4.96)
\end{aligned}
$$

Observe que os coeficientes a e b que multiplicam as integrais da equação acima são nulos. Portanto podemos escrever

$$
I_0 = 12De^{\frac{-k}{2D}}\theta^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}} + 4kDe^{\frac{-k}{2D}}\theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}. \qquad (4.97)
$$

Agrupando os termos temos

$$
\begin{aligned}
I_0 =& 4De^{\frac{-k}{2D}}\theta^{\frac{-3}{2}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-k^2}{4D\theta}}(3\theta+k) \\
=& \frac{4D(3\theta+k)}{\theta^{3/2}} e^{-\frac{2k\theta}{4D\theta}-\frac{\theta^2}{4D\theta}-\frac{k^2}{4D\theta}}. \qquad (4.98)
\end{aligned}
$$

Finalmente obtemos a solução para a integral (4.77)

$$
I_0 = \frac{4D(3\theta+k)}{\theta^{3/2}} e^{-\frac{(\theta+k)^2}{4D\theta}}. \qquad (4.99)
$$

Agora é possível calcular η, aplicando os limites de integração

$$
\begin{aligned}
\eta(x,t) =& \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{(\theta+k)^3 e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{7/2}} - \frac{6D(\theta+k)e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{5/2}} - \frac{4(\theta+k)e^{\frac{-(\theta+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}} d\theta \\
=& \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \left(\frac{4D(3t+k)}{t^{3/2}} e^{-\frac{(t+k)^2}{4Dt}} - \lim_{b\to 0^+} \frac{4D(3b+k)}{b^{3/2}} e^{-\frac{(b+k)^2}{4Db}} \right), \qquad (4.100)
\end{aligned}
$$

fazendo $b = 1/c$, temos:

$$
\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \left(\frac{4D(3t+k)}{t^{3/2}} e^{-\frac{(t+k)^2}{4Dt}} - \lim_{c\to +\infty} 4D \left(3.\frac{1}{c}+k\right) c^{3/2} e^{\frac{-\left(\frac{1}{c}+k\right)^2 c}{4D}} \right) \qquad (4.101)
$$

ou

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \left(\frac{4D(3t+k)}{t^{3/2}} e^{-\frac{(t+k)^2}{4Dt}} - 4Dk \underbrace{\lim_{c\to+\infty} \frac{c^{3/2}}{e^{\frac{(1/c+k)^2 c}{4D}}}}_{z} \right). \tag{4.102}$$

Na parte z da equação acima, fica claro que o denominador da fração tem um crescimento maior do que o numerador. Portanto tende para 0. Sendo assim

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \frac{4D(3t+k)}{t^{3/2}} e^{-\frac{(t+k)^2}{4Dt}}. \tag{4.103}$$

A Equação (4.103), é a solução para a integral (4.76).

Continuando com a solução, vamos substituir o valor de k em (4.103). Sabendo de (4.72) que $k = x - t$, temos:

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \frac{4D(3t+x-t)}{t^{3/2}} e^{\frac{-(t+x-t)^2}{4dt}}. \tag{4.104}$$

Desta forma, podemos finalmente encontrar a solução para a equação (4.65)

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4Dt}}(2t+x)}{2t\sqrt{\pi Dt}} \tag{4.105}$$

Como mencionando anteriormente, nesta solução (4.105), encontramos uma solução através do método das características que coincide com a solução anteriormente encontrada através de transformada de Laplace em (4.57).

4.4 A Segunda Parte da Resolução

Depois de finalmente haver encontrado o valor de ξ e de η, agora é necessário voltar ao que inicialmente foi proposto, mais precisamente em (4.15) para finalmente obter $\phi(x,t)$.

Primeiramente, é necessário relembrar que $\xi = u$ e que $\eta = v - u$. Então com base nessa afirmação, pode-se encontrar

$$u = \frac{-\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi Dt}} \tag{4.106}$$

e

$$v = \frac{\phi_0 x e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{2t\sqrt{\pi D t}}. \tag{4.107}$$

Para finalmente encontrar ϕ agora, só basta integrar u e v

$$\phi(x,t) = \begin{cases} \int u dx + f(t), \\ \int v dt + g(x). \end{cases} \tag{4.108}$$

Assim

$$\phi(x,t) = \begin{cases} \int \frac{-\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{\sqrt{\pi D t}} dx + f(t), \\ \int \frac{\phi_0 x e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{2t\sqrt{\pi D t}} + g(x) \end{cases}. \tag{4.109}$$

Estas integrais podem facilmente ser resolvidas usando programas de manipulação simbólica e sua solução nos fornece

$$\phi(x,t) = \begin{cases} -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) + f(t) \\ -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) + g(x) \end{cases} \tag{4.110}$$

Agora vamos utilizar a condição (4.12), para encontrar as funções $f(t)$ e $g(x)$

$$\phi(\infty, t) = \lim_{x\to\infty} \left(-\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right) + f(t) = 0. \tag{4.111}$$

Passando o limite encontramos

$$-\phi_0 + f(t) = 0, \tag{4.112}$$

portanto $f(t) = g(x) = \phi_0$.

Substituíndo os valores encontrados em (4.110), temos

$$\phi(x,t) = \begin{cases} -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) + \phi_0 \\ -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) + \phi_0 \end{cases} \tag{4.113}$$

Fazendo as simplificações adequadas, encontramos

$$\phi(x,t) = \begin{cases} \phi_0\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right), \\ \phi_0\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right). \end{cases} \tag{4.114}$$

A partir desta integral, é possível encontrar finalmente a solução

$$\phi(x,t) = \phi_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right). \tag{4.115}$$

A Equação (4.115), expressa a solução obtida para a equação da difusão através de um "pseudo" método das características. O fato de encontrar esta solução, mostra que num futuro talvez seja possível a obtenção da solução da equação da difusão através deste método, ou de um método adaptado para estes casos.

Capítulo 5

Segundo Problema de Difusão

Mostraremos neste capítulo um segundo problema de difusão que pode ser analisado sob a ótica do método das características, assim como foi visto no capítulo anterior.

Neste caso temos um problema cuja condição de contorno é uma função Heaviside. A inserção deste fator ao problema, torna a integração para resolução final ainda mais trabalhosa do que a anterior.

5.1 Segundo Problema de Difusão

Nesta seção vamos analisar o seguinte problema:

$$D\phi_{xx} = \phi_t \tag{5.1}$$

com as seguintes condições inicias

$$\phi(x, 0) = 0 \tag{5.2}$$

$$\phi(0, t) = f(t) \tag{5.3}$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} \phi_0 & 0 < t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \tag{5.4}$$

A condição inicial (5.4), também pode ser escrita como:

$$\phi(0,t) = \phi_0 H(t - t_0), \tag{5.5}$$

onde $H(t - t_0)$ é a função Heaviside.

A solução para esta equação, é semelhante a que utilizamos no capítulo anterior. Na verdade ela é idêntica até certo ponto, por essa razão, poderíamos iniciar a solução já com um sistema de duas equações desacopladas, mas como vamos precisar de alguns resultados para a solução final, vamos relembrar como foi obtido este sistema.

Para isso vamos começar com uma equação mais completa

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xt} + C\phi_{tt} = \phi_t \tag{5.6}$$

comparando-a com (5.1) podemos propor o seguinte:

$$\begin{cases} u = \phi_x \\ v = \phi_t \end{cases} \tag{5.7}$$

e usando a mudança proposta escrevemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} Au_x + 2Bu_t + cv_t = v, \\ \qquad\qquad v_x - u_t = 0 \end{cases} . \tag{5.8}$$

Dividindo a primeira equação por A, e acrescentando na segunda o termo v_t a ambos os lados da igualdade temos

$$\begin{cases} u_x + \frac{2B}{A}u_t + \frac{c}{A}v_t = \frac{v}{A}, \\ \quad u_x + v_t - u_t = v_t. \end{cases} \tag{5.9}$$

Vamos agora escrever o sistema (5.9), matricialmente

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2B}{A} & \frac{C}{A} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{A} \\ v_t \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Sabemos que na equação da difusão (4.1), temos $B = 0$, $C = 0$ e $A = D$, assim, o sistema fica

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{D} \\ v_t \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

Nossa intenção é transformar o sistema (5.11) em um sistema de duas equações ordinárias, desacopladas. Para isso, vamos diagonalizá-lo.

Iniciamos o processo de diagonalização encontrando os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes do sistema (5.11):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5.12}$$

O cálculo deste determinante nos fornece $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Estes são os autovalores da matriz dos coeficientes.

Agora vamos calcular os autovetores, primeiro para $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_i \\ v_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.13}$$

Donde tiramos $v_i = v_{ii}$ e portanto

$$\vec{v_1} = (1,1), \tag{5.14}$$

é um autovetor da matriz dos coeficientes do sistema (5.11).

Utilizando o segundo autovalor $\lambda = 1$, temos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_i \\ v_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.15}$$

neste caso temos $\vec{v_i} = 0$ e que $\vec{v_{ii}}$ é qualquer, portanto

$$\vec{v_2} = (0,1) \tag{5.16}$$

é o outro autovetor da matriz dos coeficiente do sistema (5.11).

Continuando com a diagonalização podemos agora reescrever o sistema (5.11) na base dos autovetores encontrados

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{V} + \underline{\underline{A}}\frac{\partial}{\partial t}\vec{V} = \vec{F}. \tag{5.17}$$

Em (5.17) temos $\vec{V} = (\xi, \eta)$, onde ξ e η são as componentes de $\vec{V}$ na base dos autovetores $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, $\underline{\underline{A}}$ é a matriz diagonalizada dos coeficientes do sistema e $\vec{F} = (\psi, \tau)$, onde ψ e τ são as componentes de $\vec{F}$, na base dos autovetores.

Podemos agora escrever finalmente o sistema diagonalizado

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \tau \end{bmatrix}, \tag{5.18}$$

ou, substituíndo os autovalores λ_1 e λ_2

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \tau \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Também podemos escrevê-lo desta maneira:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial x} = \psi, \\ &\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \tau. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Para prosseguir com a solução é necessário encontrar uma expressão para ψ e τ. Encontrar esta expressão, ainda depende da solução analítica deste problema.

5.2 Resolução por Transformada de Laplace

Neste momento da solução, é necessária a utilização da solução analítica do problema da difusão (5.1) sujeita às condições (5.2), (5.3) e (5.4), para resolvê-lo vamos utilizar transformada de Laplace.

Começamos o processo separando a equação em duas partes

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_{a} = \underbrace{D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}}_{b}. \tag{5.21}$$

Começaremos aplicando transformada de Laplace na parte a:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = s\bar{\phi}(x,s) - \phi(x,0), \tag{5.22}$$

analisando a condição (5.2) concluímos que $\phi(x,0) = 0$ e portanto podemos escrever

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = s\bar{\phi}(x,s). \tag{5.23}$$

Na parte b da equação, aplicamos também a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left(D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = D\int_0^\infty \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} e^{-st} dt, \tag{5.24}$$

retirando da integral os termos constantes

$$\mathcal{L}\left(D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty \phi e^{-st} dt. \tag{5.25}$$

Usando a definição de transformada (Greenberg, 1998), temos:

$$\mathcal{L}\left(D\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = D\frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2}. \tag{5.26}$$

Agora juntamos a e b, já transformados e obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$D\frac{d^2\bar{\phi}}{dx^2} - s\bar{\phi} = 0 \tag{5.27}$$

Esta equação diferencial ordinária, pode facilmente ser resolvida, e sua solução nos dá

$$\bar{\phi}(x,s) = Ae^{x\sqrt{\frac{s}{D}}} + Be^{-x\sqrt{\frac{s}{D}}}, \tag{5.28}$$

onde A e B, são constantes à definir.

De acordo com as condições do problema, sabemos que $A = 0$, para não "explodir" ao infinito. Só nos resta encontrar B, para isso, vamos utilizar a versão modificada da condição de contorno (5.3) usando-a na forma da função Heaviside da seguinte forma:

$$f(t) = \begin{cases} \phi_0 & 0 < t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \tag{5.29}$$

pode ser escrita como

$$\phi(0,t) = H(t-t_0)\phi_0. \tag{5.30}$$

Agora vamos aplicar transformada de Laplace também na condição (5.30)

$$\phi(0,t) = H(t-t_0)\phi_0 \rightarrow \bar{\phi}(0,s) = \frac{\phi_0 e^{-t_0 s}}{s}. \tag{5.31}$$

Desta maneira encontramos $B = \frac{\phi_0 e^{-t_0 s}}{s}$.

Voltamos agora à solução da Equação diferencial ordinária (5.28), para substituir os valores de A e B, encontrados

$$\bar{\phi}(x,s) = \frac{\phi_0 e^{-t_0 s}}{s} e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x}. \tag{5.32}$$

Agora, para finalmente encontrar $\phi(x,t)$ basta aplicar a transformada inversa, usando o teorema da convolução.

$$\phi(x,t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\phi_0 e^{-t_0 s}}{s}\right)}_{c} * \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\sqrt{\frac{s}{D}}x}\right)}_{d}. \tag{5.33}$$

Novamente dividimos em duas partes e primeiro vamos aplicar a transformada inversa na parte c

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\phi_0 e^{-t_0 s}}{s}\right) = H(t-t_0)\phi_0. \tag{5.34}$$

Na parte d também é aplicada a transformada inversa, mas para isso primeiro são necessárias algumas pequenas modificações: primeiro vamos inserir um fator constante

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{\frac{s}{D}}}\right) =& \frac{a}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{\frac{-x}{\sqrt{D}}\sqrt{s}}\right\} \\
=& \frac{a}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-2a\sqrt{s}}\right\} \\
\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{\frac{s}{D}}}\right) =& \frac{a}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{\frac{-a^2}{t}}}{t^{3/2}},
\end{aligned} \tag{5.35}$$

onde $2a = x\sqrt{D}$ e portanto $a = x/2\sqrt{D}$. Substituíndo os valores de a temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-x\sqrt{\frac{s}{D}}}\right) = \frac{x}{2\sqrt{\pi D}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4Dt}}}{t^{3/2}} \tag{5.36}$$

Assim podemos calcular finalmente $\phi(x,t)$, realizando a convolução entre as duas partes

$$\phi(x,t) = \int_0^t \frac{x\phi_0 H(t-t_0)}{2\sqrt{\pi D}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4D(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}d\tau. \tag{5.37}$$

A integral acima pode ser calculada usando um programa de manipulação simbólica e sua solução nos fornece

$$\phi(x,t) = \phi_0 \lim_{\tau\to t^-}\left[H(t-t_0)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4D(t-\tau)}}\right) - H(t-t_0)\operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{4D(t-t_0)}}\right)\right]. \tag{5.38}$$

Aplicando o limite temos:

$$\phi(x,t) = \phi_0 H(t-t_0) - \phi_0 H(t-t_0)\operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{4D(t-t_0)}}\right) \tag{5.39}$$

usando a definição de função erro complementar a solução fica

$$\phi(x,t) = \phi_0 H(t-t_0)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4D(t-t_0)}}\right). \tag{5.40}$$

Sabemos que a função Heaviside assume alguns valores pré-definidos, então nesse caso podemos reescrever a solução acima como:

$$\phi(x,t) = \phi_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4D(t-t_0)}}\right) \text{para } t > t_0 \tag{5.41}$$

A Equação (5.41) é a solução analítica para o problema de difusão abordado nesse capítulo. A utilização desta solução é necessária para resolver o sistema (5.20).

5.2.1 As Componentes do Vetor $\vec{F}$

Já sabemos que ψ e τ, são as componentes do vetor (u, v), na base dos autovetores já anteriormente encontrados, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$. Vamos agora definir essas componentes, para isso escrevemos as componentes na base dos autovetores

$$\psi\vec{v_1} + \tau\vec{v_2} = (\frac{v}{D}, v_t). \tag{5.42}$$

Assim temos de (5.14) e (5.16), que

$$\psi(1,1) + \tau(0,1) = (\frac{v}{D}, v_t). \tag{5.43}$$

e logo

$$\psi = \frac{v}{D} \tag{5.44}$$

e

$$\tau = v_t - \frac{v}{D} \tag{5.45}$$

De acordo com (5.7), sabemos que $v = \phi_t$ e utilizando a solução obtida com transformada de Laplace em (5.41), podemos obter v derivando a solução em relação a t. Desta forma encontramos

$$v = \frac{x\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{2(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \tag{5.46}$$

Assim, por (5.44) obtemos

$$\psi = \frac{x\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{2D(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}}. \tag{5.47}$$

De maneira análoga podemos obter τ. Sabemos de (5.45) que $\tau = v_t - v/D$ e utilizando a expressão analítica de v obtida (5.46), temos

$$\tau = \frac{\phi_0 x e^{\frac{-x^2}{4D(t-t_0)}}(-4t^2 - 6Dt + 8tt_0 + 6Dt_0 + 4{t_0}^2 + x^2)}{8D(t-t_0)^3\sqrt{\pi D(t-t_0)}}. \tag{5.48}$$

Essas expressões serão úteis na solução do sistema de equações (5.20).

5.2.2 As Componentes do Vetor $\vec{V}$

Vamos obter também as componentes do vetor $\vec{V} = (\xi, \eta)$. Já sabemos que ξ e η, são as componentes do vetor (u, v), na base dos autovetores já anteriormente encontrados, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$. Vamos agora definir essas componentes para realizar as comparações de resultados futuros.

Inicialmente escrevemos as componentes na base dos autovetores

$$\xi\vec{v_1} + \eta\vec{v_2} = (u, v), \tag{5.49}$$

de (5.14) e (5.16), encontramos

$$\xi(1, 1) + \eta(0, 1) = (u, v), \tag{5.50}$$

ou como sistema de equações

$$\begin{cases} \xi = u, \\ \xi + \eta = v. \end{cases} \tag{5.51}$$

Desta forma encontramos

$$\xi = u \tag{5.52}$$

e

$$\eta = v - u. \tag{5.53}$$

Agora precisamos encontrar as expressões para ξ e η. Para isso, vamos usar as expressões de u e v.

Sabemos de (5.7) que $u = \phi_x$, assim utilizando a solução analítica obtida por transformada de Laplace em (5.41), podemos facilmente obter u, derivando esta solução em relação a x;

$$u = \frac{-\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{\sqrt{\pi D(t - t_0)}}. \tag{5.54}$$

Assim, sabendo que $\xi = u$ temos

$$\xi = \frac{-\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \tag{5.55}$$

Analogamente obtemos η sabendo que $\eta = v - u$, usamos (5.46) e (5.54), temos

$$\eta = \frac{\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4D(t-t_0)}} (x + 2(t-t_0))}{2(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \tag{5.56}$$

Os valores de ξ e η, aqui obtidos, são decorrentes apenas da solução analítica do problema da difusão abordado nesse capítulo. Nossa intenção é utilizá-lo para comparação com a solução que será obtida usando o método das características.

5.3 Resolução do Sistema de Equações

Agora que já encontramos tudo que era necessário, podemos voltar ao sistema (5.20) para resolvê-lo.

Iniciaremos pela primeira equação

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \psi. \tag{5.57}$$

Já sabemos de (5.47) qual é a expressão para ψ, portanto podemos reescrever a equação (5.57), como:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{x\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{2D(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}}. \tag{5.58}$$

Antes de resolvê-la, precisamos de uma condição inicial. Para encontrar esta condição, voltaremos à solução analítica do problema, mas especificamente em ξ, já encontrado anteriormente em (5.55) . Assim temos:

$$\xi(x,0) = \lim_{t \to t_0} \frac{-\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{\sqrt{\pi D(t-t_0)}}, \tag{5.59}$$

desta forma, a condição inicial para solução equação é dada por

$$\xi(x, t_0) = 0. \tag{5.60}$$

Agora podemos resolver a equação (5.57), simplesmente integrando

$$\xi(x,t) = \int \frac{x\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{2D(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}} dx + f(t). \tag{5.61}$$

Assim obtemos

$$\xi(x,t) = \frac{-\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{\sqrt{\pi D(t-t_0)}} + f(t), \tag{5.62}$$

onde $f(t)$ é uma função à ser determinada pela condição inicial.

Passando a condição (5.60), é fácil obter $f(t) = 0$ e consequente

$$\xi(x,t) = \frac{-\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \tag{5.63}$$

Note que o valor para ξ, aqui obtido, coincide com o valor encontrado através de solução analítica em (5.55).

Vamos agora analisar à segunda equação do sistema (5.20)

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \tau \tag{5.64}$$

Já sabemos de (5.48), que há uma expressão para τ, assim podemos reescrever a Equação (5.64), como

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{-x\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4D(t-t_0)}}(4t^2 + 6Dt - 8tt_0 - 6Dt_0 + 4t_0^2 - x^2)}{8D(t-t_0)^3\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \tag{5.65}$$

Agora podemos resolver essa equação usando o método das características, mas primeiro precisamos de uma condição inicial.

Para encontrar a condição inicial, voltaremos à solução analítica do problema, mas especificamente em η, já encontrado anteriormente em (5.56). Assim temos

$$\eta(x,t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4D(t-t_0)}} \left(x + 2(t-t_0)\right)}{2(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \tag{5.66}$$

deste limite é possível retirar a seguinte condição inicial:

$$\eta(x,t_0) = 0 \tag{5.67}$$

Agora vamos resolver a equação usando o método das características. Assim como ocorreu no problema da onda, começaremos obtendo a derivada total em relação a t:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{dt}{dt}. \tag{5.68}$$

Comparando a derivada total (5.68) com (5.65), temos

$$\frac{dx}{dt} = 1 \tag{5.69}$$

e portanto

$$x = t + k, \tag{5.70}$$

são as curvas características da equação (5.65), onde k é a constante que define a curva.

Graficamente podemos ver essas curvas como retas paralelas. Sua representação, está na Figura (5.1), onde também está representado um ponto qualquer (x_1, t_1), por onde passa a curva característica $t_1 = x_1 + k$, definindo para esta curva $k = t_1 - x_1$.

Para um ponto qualquer, a constante k é definida como

$$k = x - t \tag{5.71}$$

Para resolver a equação basta agora integrar ao longo das curvas características, ou seja

$$\eta(x,t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d\eta}{dt} dt. \tag{5.72}$$

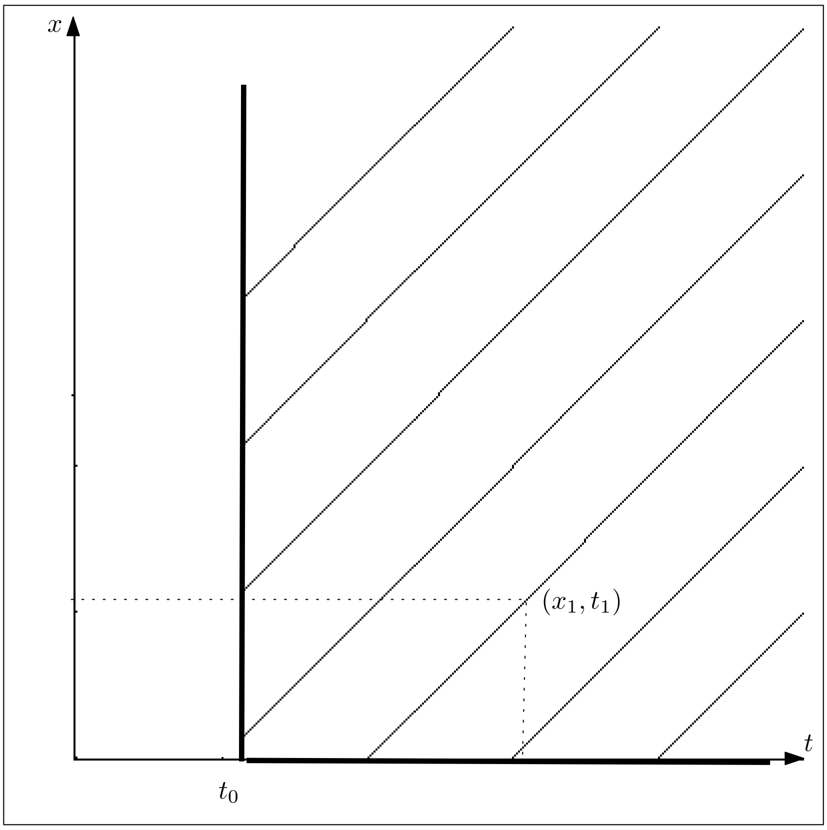

Figura 5.1: Curvas características e condição inicial da Equação (5.65)

Utilizando (5.68) e (5.65) podemos reescrever a integral

$$\eta(x,t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\phi_0 x e^{\frac{-x^2}{4D(\zeta - t_0)}} (-4\zeta^2 - 6D\zeta + 8\zeta t_0 + 6Dt_0 + 4{t_0}^2 + x^2)}{8D(\zeta - t_0)^3 \sqrt{\pi D(\zeta - t_0)}} d\zeta. \tag{5.73}$$

Sabemos que $x = t + k$ e a integral (5.73) pode ser reescrita como

$$\eta(x,t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\phi_0 (\zeta + k) e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta - t_0)}} (-4\zeta^2 - 6D\zeta + 8\zeta t_0 + 6Dt_0 + 4{t_0}^2 + (\zeta + k)^2)}{8D(\zeta - t_0)^3 \sqrt{\pi D(\zeta - t_0)}} d\zeta. \tag{5.74}$$

Juntando os termos semelhantes

$$\eta(x,t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\phi_0 (\zeta + k) e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta - t_0)}} \left((\zeta + k)^2 - 4(\zeta - t_0)^2 - 6D(\zeta - t_0)\right)}{8D(\zeta - t_0)^3 \sqrt{\pi D(\zeta - t_0)}} d\zeta. \tag{5.75}$$

Assim como a integral (4.76), a integral acima também não possui (até onde sabemos) solução catalogada. Sua solução só foi possível, porque foi baseada na anterior (4.76), que aparentemente é mais simples do que essa. A solução que aqui será descrita, foi desenvolvida sem auxílio de nenhum programa de manipulação simbólica, já que estes também se mostraram ineficientes nestes casos.

Vamos iniciar a solução de (5.75), expandindo o integrando em integrais menores

$$\eta(x,t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\phi_0(\zeta+k)^3 e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{8D\sqrt{\pi D}(\zeta-t_0)^{7/2}} + \int_{t_0}^{t} \frac{\phi_0(\zeta+k)(-4(\zeta-t_0)^2) e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{8D\sqrt{\pi D}(\zeta-t_0)^{7/2}} + \int_{t_0}^{t} \frac{\phi_0(\zeta+k)(-6D(\zeta-t_0)) e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{8D\sqrt{\pi D}(\zeta-t_0)^{7/2}}. \tag{5.76}$$

Agora retiramos todas as constantes fora da integral

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \int_{t_0}^{t} \frac{(\zeta+k)^3 e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{(\zeta-t_0)^{7/2}} d\zeta + \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \int_{t_0}^{t} \frac{-6D(\zeta+k) e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{(\zeta-t_0)^{5/2}} d\zeta + \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}} \int_{t_0}^{t} \frac{-4(\zeta+k) e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{(\zeta-t_0)^{3/2}} d\zeta. \tag{5.77}$$

Fazendo

$$C = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}}, \tag{5.78}$$

podemos reescrever a equação (5.77) como

$$\eta(x,t) = C\left(\int_{t_0}^{t} \frac{(\zeta+k)^3 e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{(\zeta-t_0)^{7/2}} d\zeta + \int_{t_0}^{t} \frac{-6D(\zeta+k) e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{(\zeta-t_0)^{5/2}} d\zeta + \int_{t_0}^{t} \frac{-4(\zeta+k) e^{\frac{-(\zeta+k)^2}{4D(\zeta-t_0)}}}{(\zeta-t_0)^{3/2}} d\zeta\right). \tag{5.79}$$

Agora é necessário fazer uma mudança de variável. Para isso vamos definir as novas variáveis

$$\theta = \zeta - t_0 \tag{5.80}$$

e

$$\alpha = t_0 + k, \tag{5.81}$$

assim temos $\zeta + k = \zeta - t_0 + t_0 + k = \theta + \alpha$, $d\zeta = d\theta$ e os limites de integração agora variam de 0 até $\zeta - t_0$.

Aplicando estas mudanças na integral (5.79) temos

$$\eta(x,t) = C\int_0^{\zeta - t_0}\left(\frac{(\theta+\alpha)^3 e^{\frac{-(\theta+\alpha)^2}{4D\theta}}}{\theta^{7/2}} - \frac{6D(\theta+\alpha)e^{\frac{-(\theta+\alpha)^2}{4D\theta}}}{\theta^{5/2}} - \frac{4(\theta+\alpha)e^{\frac{-(\theta+\alpha)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}}\right)d\theta. \quad (5.82)$$

Rearranjando os termos dentro da integral temos

$$\begin{aligned}\eta(x,t) =& C\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}\left(\frac{(\theta+\alpha)^3}{\theta^2} - \frac{6D(\theta+\alpha)}{\theta} - 4(\theta+\alpha)\right)e^{\frac{-(\theta+\alpha)^2}{4D\theta}}d\theta,\\ =& C\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}(\theta+\alpha)\left(\frac{(\theta+\alpha)^2}{\theta^2} - \frac{6D}{\theta} - 4\right)e^{\frac{-(\theta+\alpha)^2}{4D\theta}}d\theta\\ =& C\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}(\theta+\alpha)\left(\frac{\theta^2 + 2\alpha\theta + \alpha^2 - 6D\theta - 4\theta^2}{\theta^2}\right)e^{\frac{-\theta^2 - 2\alpha\theta - \alpha^2}{4D\theta}}d\theta. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Retirando o termo constante

$$\eta(x,t) = Ce^{\frac{-2\alpha}{4D}}\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}(\theta+\alpha)\left(\frac{-3\theta^2 + (2\alpha - 6D)\theta + \alpha^2}{\theta^2}\right)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta. \quad (5.84)$$

Agora fazemos

$$C_a = Ce^{\frac{-2\alpha}{4D}}, \quad (5.85)$$

a integral (5.84) pode ser reescrita como

$$\eta(x,t) = C_a\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}(\theta+\alpha)\left(-3 + \frac{(2\alpha - 6D)}{\theta} + \frac{\alpha^2}{\theta^2}\right)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta. \quad (5.86)$$

Novamente separamos o integrando

$$\begin{aligned}\eta(x,t) = & C_a\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}\theta(-3)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta + C_a\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}(2\alpha - 6D)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta\\ & + C_a\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}\frac{\alpha^2}{\theta}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta + C_a\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}(-3\alpha)e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta\\ & + C_a\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}\frac{\alpha(2\alpha - 6D)}{\theta}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta + C_a\int_0^{\zeta - t_0}\theta^{-3/2}\frac{\alpha^3}{\theta^2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Agora retiramos as constantes para fora de todas as integrais

$$\begin{aligned}\eta(x,t) = -3C_a\int_0^{\zeta-t_0}\theta^{-3/2}\theta e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta + (2\alpha-6D)C_a\int_0^{\zeta-t_0}\theta^{-3/2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta \\ + C_a\alpha^2\int_0^{\zeta-t_0}\theta^{-3/2}\frac{1}{\theta}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta + (-3\alpha)C_a\int_0^{\zeta-t_0}\theta^{-3/2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta \\ + \alpha(2\alpha-6D)C_a\int_0^{\zeta-t_0}\theta^{-3/2}\frac{1}{\theta}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta + \alpha^3C_a\int_0^{\zeta-t_0}\theta^{-3/2}\frac{1}{\theta^2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta.\end{aligned} \tag{5.88}$$

A partir deste ponto, vamos utilizar integrais indefinidas, para no final aplicarmos os limites de integração.

Primeiro vamos definir algumas constantes para simplificar a notação:

$$C_1 = -3C_a, \tag{5.89}$$

$$C_2 = -C_a(\alpha+6D), \tag{5.90}$$

$$C_3 = C_a(3\alpha^2-6D\alpha) \tag{5.91}$$

e

$$C_4 = C_a\alpha^3. \tag{5.92}$$

Agora Podemos reescrever a integral (5.88) como

$$\begin{aligned}I = C_1\int\theta^{-3/2}\theta e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta + C_2\int\theta^{-3/2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta \\ + C_3\int\frac{\theta^{-3/2}}{\theta}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta + \frac{C_4 4D}{\alpha^2}\underbrace{\int\theta^{-3/2}\frac{\alpha^2}{4D\theta^2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta}_{a}.\end{aligned} \tag{5.93}$$

Vamos analisar a parte a da equação (5.93)

$$a = \int\theta^{-3/2}\frac{\alpha^2}{4D\theta^2}e^{\frac{-\theta}{4D}}e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}d\theta. \tag{5.94}$$

Vamos resolvê-la usando a regra do produto triplo

$$\int uvdw = uvw - \int uwdv - \int vwdu, \tag{5.95}$$

para isso definimos

$$u = \theta^{-3/2}, \qquad v = e^{-\theta/4D}, \qquad dw = \frac{\alpha^2}{4D\theta^2} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} \qquad \text{e} \qquad w = e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} \tag{5.96}$$

Agora aplicamos estas variáveis da regra do produto na integral (5.94) e obtemos

$$a = \theta^{-3/2} e^{\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta} - \left(\frac{-1}{4D}\right) \int \theta^{-3/2} e^{-\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta} d\theta \\ - \left(\frac{-3}{2}\right) \int \frac{\theta^{-3/2}}{\theta} e^{-\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta} d\theta \tag{5.97}$$

Levando (5.97) em (5.93), temos

$$I = C_1 \int \theta^{-3/2} \theta e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + C_2 \int \theta^{-3/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + C_3 \int \frac{\theta^{-3/2}}{\theta} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + \\ \frac{C_4 4D}{\alpha^2} \left(\theta^{-3/2} e^{-\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta} + \frac{1}{4D} \int \theta^{-3/2} e^{-\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta} d\theta + \frac{3}{2} \int \frac{\theta^{-3/2}}{\theta} e^{-\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta} d\theta \right). \tag{5.98}$$

Novamente vamos agrupar as constantes:

$$C_5 = C_2 + \frac{C_4}{\alpha^2} \tag{5.99}$$

e

$$C_6 = C_3 + \frac{C_4 6D}{\alpha^2}. \tag{5.100}$$

Agora vamos reescrever a integral (5.98) utilizando as constantes e agrupando integrais semelhantes

$$I = C_1 \int \theta^{-3/2} \theta e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + C_5 \int \theta^{-3/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta \\ + C_6 \int \frac{\theta^{-3/2}}{\theta} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + \frac{C_4 4D}{\alpha^2} \left(\theta^{-3/2} e^{-\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta} \right). \tag{5.101}$$

Para o próximo passo, é necessária uma pequena modificação, na equação (5.101), mais precisamente no termo onde aparece C_6, uma constante será inserida, transformando a integral em

$$\begin{aligned} I = {} & C_1 \int \theta^{-3/2}\theta e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + C_5 \int \theta^{-3/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta \\ & + \frac{C_6 4D}{\alpha^2} \underbrace{\int \theta^{-3/2}\theta e^{\frac{-\theta}{4D}} \frac{\alpha^2}{4D\theta^2} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta}_{b} + \frac{C_4 4D}{\alpha^2}\left(\theta^{-3/2} e^{\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta}\right). \end{aligned} \tag{5.102}$$

Na parte b também utilizaremos a regra do produto (5.95), para isso vamos definir as variáveis da seguinte maneira:

$$b = \int \underbrace{\theta^{-3/2}\theta}_{u} \underbrace{e^{\frac{-\theta}{4D}}}_{v} \underbrace{\frac{\alpha^2}{4D\theta^2} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta}_{dw}. \tag{5.103}$$

Aplicando a regra do produto temos

$$b = \theta^{-1/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} - \left(\frac{-1}{4D}\right) \int \theta^{-1/2} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} e^{\frac{-\theta}{4D}} d\theta - \left(\frac{-1}{2}\right) \int \theta^{-3/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta. \tag{5.104}$$

Levando (5.104) em (5.102), temos

$$\begin{aligned} I = {} & C_1 \int \theta^{-3/2}\theta e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + C_5 \int \theta^{-3/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta \\ & + \frac{C_6 4D}{\alpha^2}\left(\theta^{-1/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} + \frac{1}{4D} \int \theta^{-1/2} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} e^{\frac{-\theta}{4D}} d\theta + \frac{1}{2} \int \theta^{-3/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta\right) \\ & + \frac{C_4 4D}{\alpha^2}\left(\theta^{-3/2} e^{\theta/4D} e^{-\alpha^2/4D\theta}\right). \end{aligned} \tag{5.105}$$

Novamente vamos definir constantes para agrupar as integrais

$$C_7 = C_1 + \frac{C_6}{\alpha^2}, \tag{5.106}$$

$$C_8 = C_5 + \frac{C_6 2D}{\alpha^2}, \tag{5.107}$$

$$C_9 = \frac{C_6 4D}{\alpha^2} \tag{5.108}$$

e

$$C_{10} = \frac{C_4 4D}{\alpha^2}. \tag{5.109}$$

Dessa forma agrupamos as integrais de (5.105) e obtemos

$$I = C_7 \int \theta^{-1/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + C_8 \int \theta^{-3/2} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}} d\theta + \left(C_9 \theta^{-1/2} + C_{10}\theta^{-3/2}\right) \left(e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}\right). \tag{5.110}$$

Para que a solução da integral (5.93), seja de fato semelhante a que foi resolvida no capítulo anterior, as constantes C_7 e C_8 devem ser nulas. Vamos verificar se isso ocorre:

- Vamos mostrar que $C_7 = 0$: de acordo com (5.89), (5.91), (5.92), (5.100), (5.106) e (5.85) sabemos que

$$C_7 = C_1 + \frac{C_6}{\alpha^2}$$

  com

$$C_1 = -3C_a \qquad , \qquad C_6 = C_3 + \frac{C_4 6D}{\alpha^2}$$
$$C_3 = C_a(3\alpha^2 - 6D\alpha) \qquad \text{e} \qquad C_4 = C_a\alpha^3,$$

  portanto,

$$C_7 = -3C_a + \frac{3C_a\alpha^2}{\alpha^2} \rightarrow C_7 = 0.$$

- Vamos mostrar que $C_8 = 0$: de acordo com (5.107), temos que

$$C_8 = C_5 + \frac{C_6 2D}{\alpha^2}$$

  com

$$C_5 = C_2 + \frac{C_4}{\alpha^2} \qquad , \qquad C_2 = -C_a(\alpha + 6D)$$
$$\text{e} \qquad C_6 = 3C_a\alpha^2,$$

  portanto,

$$C_8 = -6DC_a + \frac{3C_a\alpha^2 2D}{\alpha^2} \rightarrow C_8 = 0.$$

De posse dessas informações, voltamos em (5.110) para finalmente obtermos a integral indefinida

$$I = \left(C_9\theta^{-1/2} + C_{10}\theta^{-3/2}\right) e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}. \tag{5.111}$$

$$I = \theta^{-3/2}\left(C_9\theta + C_{10}\right) e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}. \tag{5.112}$$

Primeiro vamos resgatar as constantes C_9 e C_{10}, começando por C_9: Sabemos de (5.108) que

$$C_9 = \frac{C_6 4D}{\alpha^2},$$

com

$$C_6 = 3C_a\alpha^2, \qquad C_a = Ce^{\frac{-2\alpha}{4D}} \qquad \text{e} \qquad C = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}},$$

assim

$$C_9 = \frac{3\phi_0 e^{\frac{-\alpha}{2D}}}{2\sqrt{\pi D}}.$$

Analogamente obtemos C_{10}, sabendo de (5.109), que

$$C_{10} = \frac{C_4 4D}{\alpha^2},$$

com

$$C_4 = C_a\alpha^3, \qquad C_a = Ce^{\frac{-2\alpha}{4D}} \qquad \text{e} \qquad C = \frac{\phi_0}{8D\sqrt{\pi D}},$$

donde

$$C_{10} = \frac{\phi_0 \alpha e^{\frac{-\alpha}{2D}}}{2\sqrt{\pi D}}.$$

Agora vamos substituir as constantes C_9 e C_{10} na integral (5.112)

$$I = \theta^{-3/2}\left(\frac{3\phi_0 e^{\frac{-\alpha}{2D}}}{2\sqrt{\pi D}}\theta + \frac{\phi_0\alpha e^{\frac{-\alpha}{2D}}}{2\sqrt{\pi D}}\right) e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}. \tag{5.113}$$

É possível encontrar as integrais definidas, substituindo os limites de integração

$$\eta(x,t) = \left[\frac{\phi_0 e^{\frac{-\alpha}{2D}}(3\theta+\alpha)e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}}{2\sqrt{\pi D}\theta^{3/2}}\right]_0^{\zeta - t_0}. \tag{5.114}$$

Retirando as constantes

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{2\sqrt{\pi D}} \left[\frac{(3\theta+\alpha)e^{\frac{-\alpha}{2D}} e^{\frac{-\theta}{4D}} e^{\frac{-\alpha^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}} \right]_0^{\zeta - t_0}. \tag{5.115}$$

Agrupando alguns termos

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{2\sqrt{\pi D}} \left[\frac{(3\theta+\alpha)e^{\frac{-(\theta+\alpha)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}} \right]_0^{\zeta - t_0}. \tag{5.116}$$

Sabemos que $\alpha = t_0 + k$, então

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{2\sqrt{\pi D}} \left[\frac{(3\theta+t_0+k)e^{\frac{-(\theta+t_0+k)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}} \right]_0^{\zeta - t_0}. \tag{5.117}$$

Aplicando os limites de integração, temos

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{2\sqrt{\pi D}} \left[\frac{(3(t-t_0)+t_0+k)e^{\frac{-((t-t_0)+t_0+k)^2}{4D(t-t_0)}}}{(t-t_0)^{3/2}} \right] - \lim_{\theta\to 0^+} \frac{(3\theta+\alpha)e^{\frac{-(\theta+\alpha)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}}. \tag{5.118}$$

O limite acima pode ser facilmente obtido fazendo $\theta = \frac{1}{c}$, temos

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{e^{\frac{-(\theta+alpha)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}} = \lim_{c\to\infty} \frac{c^{3/2}}{e^{(c(1/c+\alpha)^2)/4D}} = 0. \tag{5.119}$$

Portanto,

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{(3\theta+\alpha)e^{\frac{-(\theta+\alpha)^2}{4D\theta}}}{\theta^{3/2}} = 0. \tag{5.120}$$

Dessa forma obtemos

$$\begin{aligned} \eta(x,t) &= \frac{\phi_0}{2\sqrt{\pi D}} \left(\frac{(3t-3t_0+t_0+k)e^{\frac{-(t+k)^2}{4D(t-t_0)}}}{(t-t_0)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{\phi_0}{2\sqrt{\pi D}} \left(\frac{(3t-2t_0+k)e^{\frac{-(t+k)^2}{4D(t-t_0)}}}{(t-t_0)^{3/2}} \right), \end{aligned} \tag{5.121}$$

mas sabemos de (5.71), que $k = x - t$, então

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0(3t - 2t_0 + x - t)e^{\frac{-x^2}{4D(t-t_0)}}}{2(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}}. \tag{5.122}$$

Finalmente chegamos ao resultado final da segunda equação do sistema (5.20)

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0\left(2(t-t_0)+x\right)e^{\frac{-x^2}{4D(t-t_0)}}}{2(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}}. \tag{5.123}$$

Este valor foi obtido utilizando o método das características, porém ele coincide com aquele que foi encontrado em (5.56) usando transformada de Laplace.

5.3.1 A Segunda Parte da Resolução

Depois de finalmente haver encontrado o valor de ξ e de η, agora é necessário voltar ao que inicialmente foi proposto, mais precisamente em (5.7) para finalmente obter $\phi(x,t)$.

Primeiramente, é necessário relembrar que $\xi = u$ e que $\eta = v - u$, tanto o resultado analítico obtido em (5.55) e (5.56), quanto o resultado obtido através do método das características em (5.63) e (5.123), podem ser utilizados. Assim temos

$$u = \frac{-\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4D(t-t_0)}}}{\sqrt{\pi D(t-t_0)}} \tag{5.124}$$

e

$$v = \frac{x\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{2(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}}. \tag{5.125}$$

Para finalmente encontrar ϕ basta integrar u e v

$$\phi(x,t) = \begin{cases} \int u dx + f(t) \\ \int v dt + g(x) \end{cases} \tag{5.126}$$

Assim

$$\phi(x,t) = \begin{cases} \int \frac{-\phi_0 e^{\frac{-x^2}{4D(t-t_0)}}}{\sqrt{\pi D(t-t_0)}} dx + f(t), \\ \int \frac{x\phi_0 e^{-x^2/(4D(t-t_0))}}{2(t-t_0)\sqrt{\pi D(t-t_0)}} dt + g(x). \end{cases} \tag{5.127}$$

A integral acima, foi obtida utilizando um programa de manipulação simbólica

$$\phi(x,t) = \begin{cases} -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_0)}}\right) + f(t) \\ -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_0)}}\right) + g(x) \end{cases} \tag{5.128}$$

Para finalmente encontrar $\phi(x,t)$ precisamos de uma condição para encontrar as funções $f(t)$ e $g(x)$. Para isso vamos utilizar a condição (5.3)

$$\phi(0,t_0) = \lim_{t\to t_0} -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{0}{2\sqrt{D(t-t_0)}}\right) + f(t) = \phi_0. \tag{5.129}$$

A partir desta condição fica fácil concluir que $f(t) = \phi_0$. Analogamente, concluímos que $g(x) = \phi_0$. Desta forma podemos reescrever a Equação (5.128), como

$$\phi(x,t) = \begin{cases} -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_0)}}\right) + \phi_0), \\ -\phi_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_0)}}\right) + \phi_0. \end{cases} \tag{5.130}$$

Desta forma podemos encontrar

$$\phi(x,t) = \phi_0\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_0)}}\right)\right), \tag{5.131}$$

usando a definição de função erro complementar encontramos

$$\phi(x,t) = \phi_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_0)}}\right), \tag{5.132}$$

esta solução é válida para $t > t_0$, se quisermos analisar esta função em todo o domínio, basta acrescentar a função Heaviside à frente. Desta maneira a solução final será

$$\phi(x,t) = \phi_0 H(t-t_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_0)}}\right). \tag{5.133}$$

A equação (5.132), é a solução para a Equação (5.1). O valor obtido aqui utilizando um "pseudo" método das características, é idêntico ao que foi encontrado utilizando transformada de Laplace em (5.41). O fato desta solução ter sido encontrada, mostra que o método das características pode no futuro ser uma importante ferramenta para ser utilizada na solução de diversos tipos de problemas, não só hiperbólicos, mas também parabólicos.

Capítulo 6

Conclusões e Recomendações

Este trabalho visou a avaliação de possibilidade de utilização do Método das Características em problemas parabólicos - mais especificamente a Equação da Difusão também conhecida como Equação do Calor. Para esta finalidade o Método das Características mostrou-se ineficiente, já que este baseia-se na transformação de uma equação diferencial parcial de segunda ordem em um sistema de equações de primeira ordem. A solução destas equações é obtida através de integração ao longo das linhas características. Porém na Equação da Difusão não é possível obter um sistema de duas equações de primeira ordem.

Devido à ineficiência do método em se obter uma solução para a Equação da Difusão, o foco deste trabalho passou a ser o estudo do comportamento da solução analítica desta equação. O primeiro obstáculo encontrado era a obtenção de um sistema de duas equações. Este problema foi resolvido, inserindo um termo no sistema, este termo mais tarde passou a ser o fator que determinou considerável grau de dificuldade à integração. O segundo obstáculo também foi derivado do primeiro, devido ao fato de que o fator inserido, o vetor $\vec{F}$ resultante do sistema, tinha em suas componentes expressões derivadas da função solução. Sendo assim, tivemos que encontrar a solução para que suas derivadas fossem utilizadas na solução do sistema.

Ao se realizar todas essas mudanças foi possível aplicar o método das características às duas equações obtidas da Equação da Difusão. Esta aplicação exigiu considerável esforço analítico em se resolver a quadratura ao longo das curvas características, já que a solução destas integrais não foi encontrada nas fontes pesquisadas.

Após a integração, verificamos que o método era consistente no sentido de recuperar a solução analítica.

Nosso objetivo com relação ao trabalho foi alcançado, mas ainda há muito o que pesquisar no campo das soluções analíticas. O método das características permite encontrar soluções analíticas de maneira simples e de fácil interpretação geométrica. As integrais que aqui foram obtidas usando conceitos de cálculo diferencial e integral, talvez possam ser obtidas de outras maneiras.

No campo das soluções numéricas, é possível a utilização de métodos iterativos para determinar por exemplo as derivadas da função que são as componentes do vetor $\vec{F}$. Também pode ser possível encontrar uma nova maneira de solução para as integrais aqui abordadas.

Apêndice A

Tentativa de Solução por Séries

Aqui vamos mostrar a tentativa de solução da integral (4.76), utilizando séries. Porém neste caso temos limites de integração diferentes, por essa razão, vamos mostrar como se chegou à essa integral. Abordaremos apenas a segunda equação do sistema (4.28)

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{x e^{\frac{x^2}{4Dt}} (x^2 - 6Dt - 4t^2)}{8Dt^3 \sqrt{\pi D t}} \tag{A.1}$$

com a seguinte condição inicial

$$\eta(x, 0) = 0. \tag{A.2}$$

Esta condição foi obtida da mesma forma do capítulo 3, ou seja, utilizando a solução analítica.

Para aplicar o método das características começamos com a derivada total que desta vez foi em relação a x:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{dt}{dx} \tag{A.3}$$

comparando a derivada total (A.3) com (A.1), temos

$$\frac{dt}{dx} = 1 \tag{A.4}$$

e portanto

$$t = x + k \tag{A.5}$$

são as curvas características da equação (A.1), onde k é a constante que define a curva.

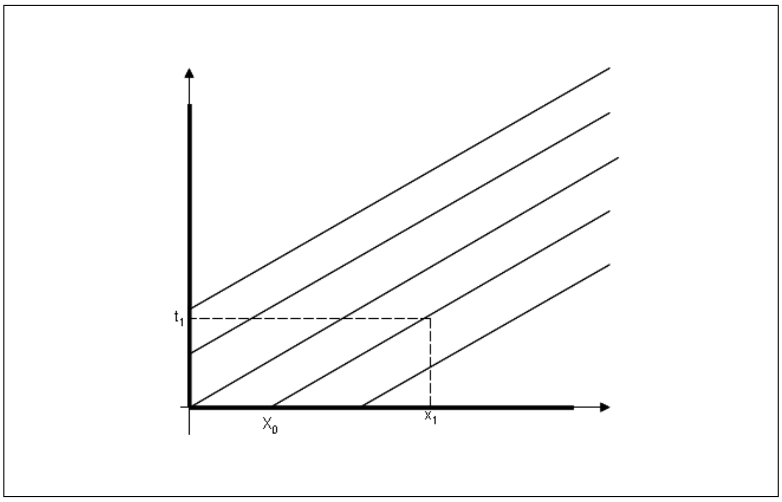

Figura A.1: Curvas características e condição inicial da Equação (A.1)

Temos na Figura (A.1), a representação das curvas (A.5), também está representado um ponto (x_1, t_1), por onde passa a curva $t_1 = x_1 + k$, a partir deste ponto podemos encontrar $k = x_1 - t_1$ assim k pode ser definido para qualquer ponto como

$$k = x - t. \tag{A.6}$$

Para resolver a equação basta agora integrar ao longo das curvas características,ou seja

$$\eta(x,t) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\eta}{dx} dx \tag{A.7}$$

e comparando (5.68), com (5.65), temos que

$$\eta(x,t) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\phi_0 \chi e^{\frac{-\chi^2}{4Dt}} (\chi^2 - 6Dt - 4t^2)}{8Dt^3 \sqrt{\pi D t}} d\chi \tag{A.8}$$

Como estamos integrando em x, devemos colocar t como função de x sendo assim, usamos as curvas (A.5), também com base nas curvas, encontramos $x_0 = -k$. Dessa forma a integral a ser resolvida é a seguinte

$$\eta(x,t) = \int_{x_0=-k}^{x} \frac{\phi_0 \chi e^{\frac{-\chi^2}{4D(\chi+k)}} (\chi^2 - 6D(\chi+k) - 4(\chi+k)^2)}{8D(\chi+k)^3 \sqrt{\pi D(\chi+k)}} d\chi \tag{A.9}$$

Vamos utilizar a equação (A.9) e partir dela

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8\sqrt{\pi D}} \int_{x_0=-k}^{x} \frac{\chi e^{\frac{\chi^2}{4D(\chi+k)}} (\chi^2 - 6D(\chi+k) - 4(\chi+k)^2)}{(\chi+k)^{7/2}} d\chi. \tag{A.10}$$

Vamos reescreve-la da seguinte forma

$$\eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8\sqrt{\pi D}} \int_{x_0=-k}^{x} \underbrace{\frac{x^3 e^{\frac{-\chi^2}{4D(\chi+k)}}}{(\chi+k)^{7/2}}}_{i} - \underbrace{\frac{6\chi D e^{\frac{-\chi^2}{4D(\chi+k)}}}{(\chi+k)^{5/2}}}_{ii} - \underbrace{\frac{4\chi e^{\frac{-\chi^2}{4D(\chi+k)}}}{(\chi+k)^{3/2}}}_{iii} d\chi. \tag{A.11}$$

Sabemos que a definição para exponencial é:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + ... + \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \tag{A.12}$$

vamos então usar esta definição, para expandir em série, cada parcela da equação (A.11) separadamente:

- a parcela i

$$i = \int_{x_0=-k}^{x} \frac{x^3 e^{\frac{-\chi^2}{4D(\chi+k)}}}{(\chi+k)^{7/2}} d\chi \tag{A.13}$$

Usando a definição de exponencial (A.12), podemos escrever

$$i = \int_{x_0=-k}^{x} \frac{\chi^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{\chi^2}{4D(\chi+k)}\right]^n}{(\chi+k)^{7/2}} d\chi \tag{A.14}$$

simplificando, temos

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0=-k}^{x} \frac{(-1)^n \chi^{2n+3}}{n!(4D)^n (\chi+k)^{7/2+n}} d\chi. \tag{A.15}$$

A resolução desta integral, nos dá

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{-7/2-n}(-1)^n \chi^{2n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; \frac{-\chi}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+4)}. \tag{A.16}$$

Vamos agora aplicar os limites de integração fazendo $i(x) - i(-k)$, primeiro vamos encontrar $i(x)$

$$i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{-7/2-n}(-1)^n x^{2n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; \frac{-x}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+4)}. \tag{A.17}$$

agora vamos encontrar i(-k)

$$i(-k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{-7/2-n}(-1)^n (-k)^{2n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; \frac{-(-k)}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+4)}. \tag{A.18}$$

simplificando, temos:

$$i(-k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-k^{n-1/2}(-1)^{3n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+4)}. \tag{A.19}$$

Vamos agora encontra $i(x) - i(-k)$

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{-7/2-n}(-1)^n \chi^{2n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; \frac{-\chi}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+4)} - \frac{-k^{n-1/2}(-1)^{3n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+4)} \tag{A.20}$$

Sabemos que $k = t - x$ e simplificando i, temos finalmente:

$$i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-x)^{7/2-n}(-1)^n x^{2n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; \frac{-x}{t-x}\right)}{n!(4D)^n(2n+4)} + \frac{(t-x)^{n-1/2}(-1)^{3n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+4)} \tag{A.21}$$

- a parcela ii

$$ii = \int_{x_0=-k}^{x} \frac{-6Dxe^{\frac{-\chi^2}{4D(\chi+k)}}}{(\chi+k)^{5/2}} d\chi \tag{A.22}$$

Usando a definição de exponencial (A.12), e fazendo raciocínio análogo à parcela i, temos:

$$ii = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0=-k}^{x} \frac{-6D(-1)^n \chi^{2n+1}}{n!(4D)^n(\chi+k)^{5/2+n}} d\chi. \tag{A.23}$$

A resolução desta integral, nos dá

$$ii = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-6D(-1)^n k^{-5/2-n} \chi^{2n+2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3; \frac{-\chi}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)}. \tag{A.24}$$

Vamos agora aplicar os limites de integração fazendo $ii(x) - ii(-k)$, primeiro vamos encontrar $ii(x)$

$$ii(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-6D(-1)^n k^{-5/2-n} x^{2n+2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3; \frac{-x}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)}. \tag{A.25}$$

agora vamos encontrar ii(-k)

$$ii(-k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-6D(-1)^n k^{-5/2-n} (-k)^{2n+2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3; \frac{-(-k)}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)}. \tag{A.26}$$

simplificando, temos:

$$ii(-k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-6D(-1)^{3n+1}k^{-1/2+n}{}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+2)}. \tag{A.27}$$

Vamos agora encontra $ii(x) - ii(-k)$

$$\begin{aligned} ii = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-6D(-1)^n k^{-5/2-n}x^{2n+2}{}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3; , \frac{-x}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \\ & + \frac{6D(-1)^{3n+1}k^{-1/2+n}{}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3, 1\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \end{aligned} \tag{A.28}$$

Sabemos que $k = t - x$ e simplificando i, temos finalmente:

$$\begin{aligned} ii = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-6D(-1)^n(t-x)^{-5/2-n}x^{2n+2}{}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3; \frac{-x}{t-x}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \\ & + \frac{6D(-1)^{3n+1}(t-x)^{-1/2+n}{}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3, 1\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \end{aligned} \tag{A.29}$$

- a parcela iii

$$iii = \int_{x_0=-k}^{x} \frac{-4\chi e^{\frac{-\chi^2}{4D(\chi+k)}}}{(\chi+k)^{3/2}} d\chi \tag{A.30}$$

Usando a definição de exponencial (A.12), e fazendo raciocínio análogo à parcela ii, temos:

$$iii = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0=-k}^{x} \frac{-4(-1)^n\chi^{2n+1}}{n!(4D)^n(\chi+k)^{3/2+n}} d\chi. \tag{A.31}$$

A resolução desta integral, nos dá

$$iii = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4(-1)^n k^{-n-3/2}\chi^{2n+2}{}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; \frac{-\chi}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \tag{A.32}$$

Vamos agora aplicar os limites de integração fazendo $iii(x) - iii(-k)$, primeiro vamos encontrar $iii(x)$

$$iii(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4(-1)^n k^{-n-3/2}x^{2n+2}{}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; \frac{-x}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \tag{A.33}$$

agora vamos encontrar $iii(-k)$

$$iii(-k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4(-1)^n k^{-n-3/2}(-k)^{2n+2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; \frac{-(-k)}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \tag{A.34}$$

simplificando, temos:

$$iii(-k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4(-1)^{3n+2} k^{n+1/2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3, 1\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \tag{A.35}$$

Vamos agora encontrar $iii(x) - iii(-k)$

$$\begin{aligned} iii = \sum_{n=0}^{\infty} & \frac{-4(-1)^n k^{-n-3/2} x^{2n+2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; \frac{-x}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \\ & + \frac{4(-1)^{3n+2} k^{n+1/2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \end{aligned} \tag{A.36}$$

Sabemos que $k = t - x$ e simplificando i, temos finalmente:

$$\begin{aligned} iii = \sum_{n=0}^{\infty} & \frac{-4(-1)^n (t-x)^{-n-3/2} x^{2n+2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; \frac{-x}{t-x}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \\ & + \frac{4(-1)^{3n+2} (t-x)^{n+1/2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \end{aligned} \tag{A.37}$$

A solução final da integral (A.11), é dada pela soma das parcelas

$$i + ii + iii \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned} \eta(x,t) = \frac{\phi_0}{8\sqrt{\pi D}} \sum_{n=0}^{\infty} & \frac{(t-x)^{7/2-n}(-1)^n x^{2n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; \frac{-x}{t-x}\right)}{n!(4D)^n(2n+4)} \\ & + \frac{(t-x)^{n-1/2}(-1)^{3n+4} {}_2F_1\left(2n+4, \frac{7}{2}+n; 5+2n; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+4)} \\ & + \frac{-6D(-1)^n k^{-5/2-n} x^{2n+2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3; \frac{-x}{k}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \\ & + \frac{6D(-1)^{3n+1} k^{-1/2+n} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{5}{2}+n; 2n+3; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \\ & + \frac{-4(-1)^n (t-x)^{-n-3/2} x^{2n+2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; \frac{-x}{t-x}\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \\ & + \frac{4(-1)^{3n+2} (t-x)^{n+1/2} {}_2F_1\left(2n+2, \frac{3}{2}+n; 2n+3; 1\right)}{n!(4D)^n(2n+2)} \end{aligned} \tag{A.39}$$

A Equação (A.39) é a solução para a integral (A.11). Nosso próximo passo, seria traçar o gráfico da solução obtida por série e compará-lo com um gráfico analítico, usando a solução obtida por transformada de Laplace. Porém este gráfico não pôde ser traçado, devido à uma singularidade na série.

Referências Bibliográficas

Fortuna, A. O. (2000). *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. Edusp, São Paulo.

Gradshteyn e Ryzhik's (2007). *Table of Integrals, Series, and Products*. Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, 7a edition.

Greenberg, M. D. (1998). *Advanced engineering mathematics*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2 edition.

Iório, V. (2005). *EDP - Um curso de graduação*. IMPA publisher, Rio de Janeiro, 2a edição edition.

Leon, S. J. (1999). *Álgebra Linear com Aplicações*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Romão, C. E., Moura, L., e Silva, J. B. C. (2008). Método das Características na Solução de Problemas de Propagação de Ondas de Amplitude Finita. *XXXI SBMAC*.

Sarra, S. A. (2003). The Method of Characteristic & Conservations Laws. *Journal of Online Mathematics and its applications*, 200.